Листок 3
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ II
ЗАДАЧА ПЛАТО

1. Рассмотрим контур Γ состоящий из пары окружностей радиуса r, расположенных в параллельных плоскостях на расстоянии h друг от друга. Если h не велико, то существует два различных решения задачи Плато для контура Γ: два круга, затягивающих эти окружности и катеноид. Рассмотрим катеноид, натянутый на Γ. Обозначим за x радиус его горловины, т.е. самого узкого места. Выясните, при каких x катеноид может натягиваться на контур Γ, т.е. это решение существует. При каких значениях h происходит перестройка минимальной поверхности, т.е. катеноид уже не может существовать и превращается в пару кругов, затягивающих Γ. Найдите зависимость расстояния h между плоскостями, в которых лежат окружности, от радиуса горловины катеноида x, затягивающего данный контур. При каком значении x функция h достигает своего максимума?

2. Для контура, изображенного на рисунке 1 найдите две негомеоморфные поверхности, которые его затягивают.

3. Рассмотрим контур Γ заданный в сферических координатах (ρ, θ, ϕ) как $\rho = \cos\theta$, $\phi = \operatorname{tg}^5\theta$ (см. рис. 2, на котором приблизительно изображены две проекции этого контура). Здесь ρ – длина радиуса-вектора, ϕ – полярный угол на плоскости (x, y), $\frac{\pi}{2} - \theta$ – угол, образуемый радиус-вектором с вертикальной осью z. Докажите, что этот контур не является границей никакой погруженной поверхности в $\mathbb{E}^3$ с конечной площадью.

4. Выведите уравнение гармонических отображений $\varphi\colon (M, g) \to (N, h)$

$$\Delta_g \varphi^\alpha + g^{ij} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^j} = 0, \alpha = \overline{1, \dim N}.$$

Здесь $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ – символ Кристоффеля связности Леви-Чивиты на (N, h), (x_i) – локальная система координат на (M, g), φ^α – компоненты отображения φ.

5. Докажите лемму Гильберта-Куранта: $\forall u\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{E}^n, u \in W^{1,2}(\mathbb{D}^2, \mathbb{E}^n) \cap C^\infty_0(\overline{\mathbb{D}^2}, \mathbb{E}^n)\colon E[u] \leqslant K$ $\forall \delta \ll 1$ $\forall x \in \partial\mathbb{D}^2$ $\exists \rho \in [\delta, \delta^{1/2}]$ и дуга $C_\rho = \partial\mathbb{B}_\rho(x) \cap \mathbb{D}^2$ такие, что

$$L[u(C_\rho)]^2 \leqslant \frac{2\pi K}{|\ln \rho|}.$$

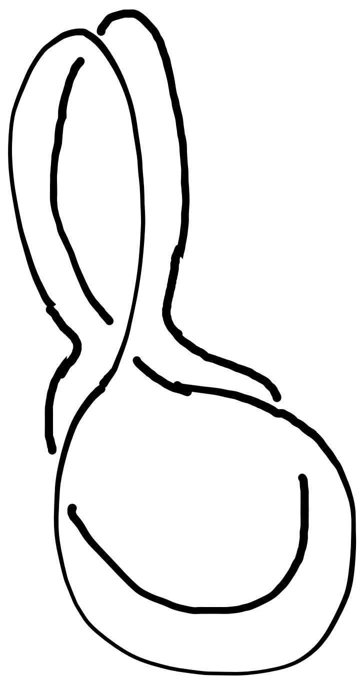

Рис 1. К задаче 2

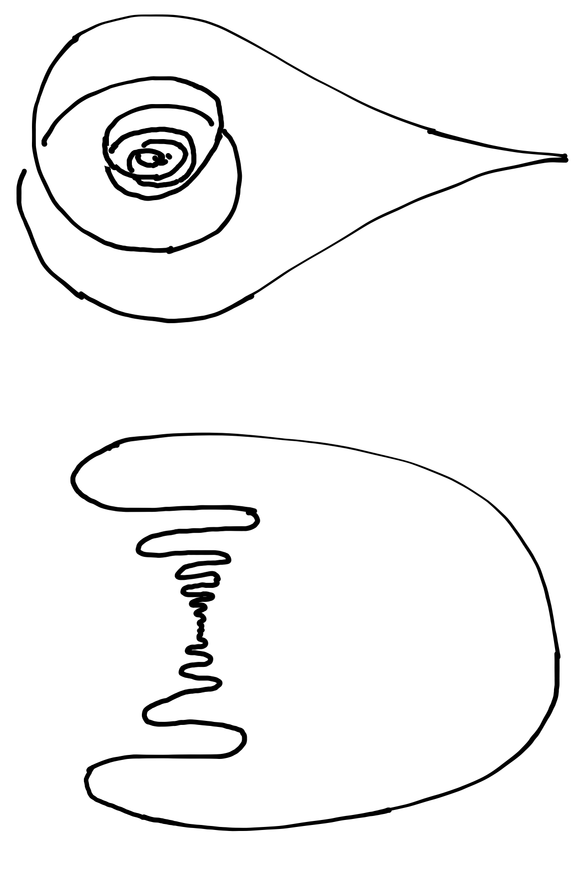

Рис. 2. К задаче 3