Листок 4
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ II
МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

1. Докажите, что часть геликоида, заключенная в прямом цилиндре вращения, является минимальной поверхностью со свободной границей в этом цилиндре с внутренностью.

2. Пусть M – минимальное подмногообразие со свободной границей в $\mathbb{B}^n$. Может ли быть так, что ∂M целиком находится в полусфере?

3. Рассмотрим стандартную параметризацию катеноида

$$u(t,\theta) = (\operatorname{ch} t\cos\theta, \operatorname{ch} t\sin\theta, t),\ 0 \leqslant \theta < 2\pi, t \in \mathbb{R}.$$

(а) Найдите значение T_K такое, что u органиченное на $\mathbb{S}^1 \times [-T_K, T_K]$ задаёт минимальный цилиндр со свободной границей в шаре $\mathbb{B}^3_R(p)$. Найдите радиус R и центр p этого шара.

(б) Используя пункт (а), найдите параметризацию *критического катеноида*, то есть минимального цилиндра со свободной границей в единичном шаре $\mathbb{B}^3$.

(в) Найдите длину границы критического катеноида, а также его площадь.

4. Рассмотрим следующее вложение листа Мёбиуса в $\mathbb{E}^4$

$$u(t,\theta) = (2\operatorname{sh} t\cos\theta, 2\operatorname{sh} t\sin\theta, \operatorname{ch} 2t\cos 2\theta, \operatorname{ch} 2t\sin 2\theta),\ 0 \leqslant \theta < 2\pi, t \in \mathbb{R},$$

где точки (t,θ) и $(-t,\theta+\pi)$ отождествлены.

(а) Найдите значение T_M такое, что u органиченное на $\mathbb{S}^1 \times [-T_M, T_M]$ задаёт минимальный лист Мёбиуса со свободной границей в шаре $\mathbb{B}^4_R(p)$. Найдите радиус R и центр p этого шара.

(б) Используя пункт (а), найдите параметризацию *критического листа Мёбиуса*, то есть минимального листа Мёбиуса со свободной границей в единичном шаре $\mathbb{B}^4$.

(в) Найдите длину границы критического листа Мёбиуса, а также его площадь.

5. Напомним, что оператор *Дирихле-к-Нейману* на римановом многообразии (M,g) с краем $\partial M \neq \emptyset$ задаётся как

$$\mathcal{D}\colon C^\infty(\partial M) \to C^\infty(\partial M),$$
$$\mathcal{D}\colon u \mapsto \frac{\partial \hat{u}}{\partial n_g}.$$

Здесь $\hat{u}$ – гармоническое продолжение функции u с границы ∂M на всё M, а n_g – векторное поле единичных нормалей к ∂M. Покажите, что $\mathcal{D}$ самосопряжён и неотрицательно определён.

6. Пусть (M,g) – n–мерное компактное риманово многообразие с краем.

(а) Докажите, что для k–го собственного числа Стеклова верно, что $\sigma_k(cg) = \frac{1}{\sqrt{c}}\sigma_k(g)$ для произвольной константы $c > 0$.

(б) Докажите, что величина $\sigma_k(g)Vol(\partial M, g)^{\frac{1}{n-1}}$ инвариантна относительно гомотетий.

7. (а) Пусть Σ – минимальная поверхность со свободной границей в $\mathbb{B}^3$. Докажите, что $\partial\Sigma$ – линия главной кривизны на Σ, т.е. касательная к $\partial\Sigma$ в любой точке совпадает с главным направлением на Σ.

(б) Пусть M – минимальная гиперповерхность со свободной границей в $\mathbb{B}^n$. Докажите, что ∂M омбилично в M, т.е. вдоль ∂M метрика пропорциональна второй квадратичной форме (со значением в числах).

8. (а) Докажите, что индекс экваториального круга в $\mathbb{B}^3$ равен 1. Для этого сначала покажите, что индекс экваториального круга хотя бы 1. Затем покажите, что индекс не более 1, используя факт, что плоский экваториальный круг имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей, разбивающих $\mathbb{B}^3$ на две равновеликие части.

(б) Докажите, что индекс экваториального круга в $\mathbb{B}^n$ равен $n-2$.

Указание: Заметьте, что оператор Якоби расщепляется на скалярные операторы.