Теория деформаций

Задачи

Это список задач для экзамена по курсу теории деформаций в НМУ в весеннем семестре 2022 года. Для сдачи экзамена на k баллов достаточно решить $k-1$ задачу. 15 июня я буду в НМУ: можно рассказать мне решения лично, или прислать их по адресу `grisha@math.northwestern.edu`. Вопросы по условиям присылайте туда же или в дискорд `https://discord.gg/7jKHBTdrbH`.

Всё происходит над базовым полем k характеристики ноль.

Задача 1: Пусть C это ассоциативная дг-коалгебра, а M это левый дг-комодуль над ней. Докажите, что C является объединением своих конечномерных дг-подкоалгебр, а M является объединением своих конечномерных дг-подкомодулей.

Задача 2: Пусть L это L^∞-алгебра такая, что $H^1(L)$ конечномерно, $H^2(L)$ одномерно, индуцированная скобка на когомологиях $H^1(L) \otimes H^1(L) \longrightarrow H^2(L)$ это невырожденное спаривание, а $H^k(L) = 0$ для $k \neq 1, 2$. Докажите, что L формальна.[1]

Задача 3: Пусть $\mathfrak{sl}_n$ — алгебра Ли бесследовых матриц размера n на n. Пусть $C_*(\mathfrak{sl}_n)$ — её дг-коалгебра Шевалле-Эйленберга, и пусть $C^*(\mathfrak{sl}_n) = (C_*(\mathfrak{sl}_n))^\vee$ двойственная дг-алгебра. Вычислите когомологии кобар-конструкции $\mathrm{Cob}(C_*(\mathfrak{sl}_n))$ и когомологии бар-конструкции $\mathrm{Bar}(C^*(\mathfrak{sl}_n))$.

Задача 4: Пусть $\mathfrak{g}$ — трёхмерная алгебра Ли Гейзенберга[2] $C_*(\mathfrak{g})$ — её дг-коалгебра Шевалле-Эйленберга, и пусть $C^*(\mathfrak{g}) = (C_*(\mathfrak{g}))^\vee$ двойственная дг-алгебра. Вычислите когомологии кобар-конструкции $\mathrm{Cob}(C_*(\mathfrak{g}))$ и когомологии бар-конструкции $\mathrm{Bar}(C^*(\mathfrak{g}))$.

Задача 5: Пусть $\mathrm{Lie}^{\leq n}(V)$ — свободная нильпотентная алгебра Ли порядка n, натянутая на конечномерное пространство V.[3]. Вычислите первые и вторые когомологии дг-алгебры $C^*(\mathrm{Lie}^{\leq n}(V))$ и определите высшие умножения

$m_n : H^1(C^*(\mathrm{Lie}^{\leq n}(V)))^{\otimes n} \longrightarrow H^2(C^*(\mathrm{Lie}^{\leq n}(V)))$ для какой-нибудь её A^∞ или C^∞ минимальной модели.

[1] Подсказка: лемма Морса

[2] Она порождена двумя элементами x, y с соотношениями, что коммутатор $[x, y]$ — центральный элемент.

[3] То есть, свободная алгебра Ли фактор по $n+1$-ому члену нижнего центрального ряда

Задача 6: Пусть L это L^∞-алгебра, а A это коммутативная дг-алгебра. Постройте структуру L^∞-алгебры на $L \otimes A$, функториальную по A, такую, что $L \otimes k = L$, если k это основное поле.

Пусть $\Omega = k[t, dt]$ это дг-алгебра полиномиальных форм на аффинной прямой. Отображение $ev_x : \Omega \longrightarrow k$ вычисления в точке x это гомоморфизм дг-алгебр $\Omega \longrightarrow k$.

Задача 7: Назовём два L^∞ отображения $f_0, f_1 : L \longrightarrow M$ гомотопными, если существует отображение $F : L \longrightarrow M \otimes \Omega$ такое, что $(M \otimes ev_0)F = f_0, (M \otimes ev_1)F = f_1$. Покажите, что гомотопные L^∞-морфизмы индуцируют одинаковые отображения функторов $\operatorname{Def}_L \longrightarrow \operatorname{Def}_M$.

Задача 8: Пусть $f : L \longrightarrow M$ это морфизм дг-алгебр ли. Его гомотопическим ядром называется дг-алгебра $K_f \subset L \times (M \otimes \Omega)$, состоящая из пар $(l, m(t))$ таких, что $ev_0 m(t) = 0, ev_1 m(t) = f(l)$. Предположим, что f это вложение, и что индуцированное отображение на когомологиях $H(f) : H(L) \longrightarrow H(M)$ тоже вложение. Докажите, что K_f гомотопически абелева.[4]

Задача 9: Пусть V — некоторый ограниченный комплекс k-векторных пространств, $\operatorname{End}(V)$ — дг-алгебра Ли его эндоморфизмов, $v \in V$ — замкнутый вектор, а $\operatorname{Ann}(v) \subset \operatorname{End}(V)$ — дг-подалгебра Ли в $\operatorname{End}(V)$, состоящая из эндоморфизмов φ таких, что $\varphi(v) = 0$. Докажите, что гомотопическое ядро вложения $\operatorname{Ann}(v) \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ — гомотопически абелева алгебра Ли.

Задача 10: Пусть M — гладкое компактное вещественное многообразие размерности $2n$. Пусть $\omega \in \Omega^n_{\mathbb{C}}(M)$ — комплекснозначная n-форма на M. Предположим, что $\omega \wedge \overline{\omega}$ это нигде не зануляющаяся $2n$-форма, и что $d\omega = 0$. Докажите, что существует единственная интегрируемая комплексная структура I на M такая, что ω является голоморфной формой объёма относительно I. Пусть L — дг-алгебра Ли дифференцирований алгебры де Рама, и пусть A — её подалгебра, состоящая из дифференцирований D таких, что $D(\omega) = 0$. Покажите, что в случае, когда для M с индуцированной комплексной структурой I верна dd^c-лемма, гомотопическое ядро $L \longrightarrow A$ гомотопически абелево.

Задача 11: Пусть $0 \longrightarrow V \longrightarrow L \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ это центральное расширение алгебр Ли. По расщеплению $s : \mathfrak{g} \longrightarrow L$ построим отображение $c : \Lambda^2\mathfrak{g} \longrightarrow V$, заданное формулой $c(a, b) = [s(a), s(b)] - s([a, b])$. Покажите, что c задаёт морфизм дг-коалгебр $C_*(\mathfrak{g}) \longrightarrow \operatorname{Sym} V[2]$, то есть, L^∞-морфизм $\mathfrak{g} \longrightarrow V[1]$, где $V[1]$ рассматривается со структурой абелевой L^∞-алгебры. Рассмотрим дг-алгебру $\hat{\mathfrak{g}}$, которая как градуи-

[4] Покажите сначала, что f расщепляется в категории комплексов.

рованное векторное пространство изоморфна $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V \oplus V[1]$, скобка задана формулой $[(a, v, sw), (a', v', sw')] := ([a, a'], c(a, a'), 0)$, а дифференциал задаётся формулой $d(a, v, sw) := (0, w, 0)$. Покажите, что естественная проекция π является L^∞-отображением $\hat{\mathfrak{g}} \longrightarrow V[1]$. Докажите, что π *стриктифицирует* c, то есть, постройте такое L^∞-отображение $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}$, что $c = \pi f$, композиции π и f.