Теория деформаций

Лекция 1

Это записки лекций по теории деформаций в НМУ в весеннем семестре 2022 года. Со всеми вопросами, предложениями, найденными опечатками и ошибками пишите мне, Грише Папаянову, на почту `grisha@math.northwestern.edu` или в дискорд `https://discord.gg/7jKHBTdrbH`.

Курс этот в большей степени будет посвящен дг-алгебрам Ли, нежели чему-то другому. Мы встанем на точку зрения, согласно которой теория деформаций это изучение гомотопической категории дг-алгебр ли (на самом деле не всех, а только нильпотентных), рациональная теория гомотопий — это подраздел теории деформаций, изучающий алгебры ли, живущие в положительных гомологических степенях, а кошулева двойственность представляет из себя просто инструмент, с помощью которого утверждения про алгебры ли переводятся в утверждения про (ко)коммутативные (ко)алгебры, хотя, конечно же, эти явления гораздо богаче таких описаний.

Мы начнём с теории деформаций. Неформально говоря, деформация математического объекта это варьирование задающих его параметров. Описать деформационную задачу можно так: рассмотрим категорию $\mathcal{C}$, в которой есть расслоенные произведения и конечный объект $*$. Рассмотрим категорию пунктированных объектов $* \longrightarrow \mathcal{C}$ и зафиксируем в ней какую-нибудь подкатегорию $\mathcal{B}$, которую мы будем называть *категорией баз*. Деформацией объекта $A \in \mathcal{C}$ над базой $B \in \mathcal{B}$ мы будем называть расслоенный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

то есть, объект X вместе с морфизмом $f : X \longrightarrow B$ и изоморфизмом "слоя X над выделенной точкой"и A. Либо же картинку можно дуализовать: считать $*$ начальным объектом и называть деформацией корасслоенный квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & A \\ B \arrow[u, "f"] \arrow[r] & * \arrow[u] \end{tikzcd}$$

На класс морфизмов f, чтобы получилось что-то осмысленное, тоже надо наложить ограничения: рассматривать не все морфизмы, а только тем или иным образом тривиализованные — плоские в случае алгебр, или локально тривиальные расслоения в случае многообразий.

Например, в качестве категории $\mathcal{C}$ можно взять категорию алгебр над каким-нибудь коммутативным кольцом k. Если в качестве категории $\mathcal{B}$ рассмотреть все (аугментированные) алгебры $B \longrightarrow B/I = k$, то деформация алгебры A над базой B это B-алгебра X вместе с выделенным изоморфизмом $X/I \longrightarrow A$. Полезность этого определения возрастает с ограничением общности: не налагая никаких условий на морфизм f, можно получить совсем тривиальный пример вроде $A \otimes_B B/I = A \otimes_B k = A$. С геометрической точки зрения (на которую нужно вставать с известной осторожностью, если не считать алгебры из $\mathcal{B}$ коммутативными) такая деформация соответствует пучку-небоскрёбу на $\operatorname{Spec} B$: слой над выделенной точкой это алгебра A, а над всеми остальными висит ноль. Чтобы получить чуть более соответствующие интуиции о непрерывном семействе картинки, можно требовать от X чтобы оно было бы свободно или проективно как B-модуль, тогда деформация - это тривиальное или локально тривиальное векторное расслоение над $\operatorname{Spec} B$ со структурой алгебры в слоях, алгебраически зависящей от слоя. Или можно потребовать плоскости, тогда у семейства появятся особенности.

Категорию баз $\mathcal{B}$ тоже надо как-то разумным образом ограничивать. В основном мы хотим изучать деформации локальные, над маленькими базами, и выбор категории баз $\mathcal{B}$ должен эту идею отражать. Например, в качестве баз можно выбрать локальные алгебры над k, или локальные и артиновы, или нильпотентные (то есть те, у которых нильпотентен аугментационный идеал). Обычно мы будем изучать базы нильпотентные или пронильпотентные. Деформации с некоммутативными базами, в принципе, изучать тоже можно, но это предмет довольно эзотерический.

Упражнение 1: Предположим, что A это коммутативное локальное артиново кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Докажите, что $\mathfrak{m}$ нильпотентен, то есть, существует такое n, что $\mathfrak{m}^n$ это нулевой идеал.

Это были деформации алгебр. Подобным же образом можно деформировать геометрические объекты: на таком уровне, главное это договориться, в какой категории мы живём. Чтобы деформировать аффинные схемы, нужно просто обернуть все стрелки в паре абзацев сверху (и, соответственно, рассматривать расслоенные квадраты вместо корасслоенных). Ничего не стоит заменить аффинные схемы на обычные, оставив в качестве категории баз категорию спектров локальных артиновых алгебр. Небольшие трудности возникают, когда приходится взаимодействовать с анализом: например, комплексные многообразия можно деформировать, взяв в качестве категории баз категорию штейновых многообразий или даже полидисков. Удобно расширять категорию комплексных многообразий до так называемых комплексных пространств — в ней существуют объекты, вроде $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]/t^n$, нильпотентные. Формально, комплексное пространство это локально окольцованное пространство, локально изоморфное множеству нулей конечного набора голоморфных функций на диске D^n, окольцованное пучком функций $\mathcal{O}_{D^n}/(f^1, \ldots, f^k)$. В качестве неконвенционального примера можно взять гомотопическую категорию, в которой под базами мы понимаем связные пространства, а под семействами — расслоения, например, в смысле Серра.

Деформации объекта $A \in \mathcal{C}$ над объектом B сами по себе образуют категорию. Морфизм между двумя деформациями $f : X \longrightarrow B$ и $f' : X' \longrightarrow B$ это коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"'] \\ B \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & B, \end{tikzcd}$$

образующий вместе с расслоенными квадратами из определения деформации коммутативный куб. Если достаточно ограничить категорию баз, то часто оказывается, что любой морфизм деформаций на самом деле является изоморфизмом. Так происходит потому, что морфизм деформаций тождественнен на центральном слое, а достаточно малое возмущение тождественного отображения обратимо: это такое мета-утверждение, проявлениями которого служат, например, теорема об обратной функции и лемма Накаямы.

Упражнение 2: Пусть опять A это коммутативное локальное артиново кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Пусть M и N это два свободных конечнопорождённых модуля над A. Предположим, что задан морфизм $f : M \longrightarrow N$ такой, что $f/\mathfrak{m} : M/\mathfrak{m}M \longrightarrow N/\mathfrak{m}N$ это изоморфизм. Докажите, что и f тогда тоже изоморфизм.

Упражнение 3: Пусть теперь $f : M \longrightarrow M$ это морфизм из модуля в себя, но M не предполагается свободным конечнопорождённым. допустим, что $f/\mathfrak{m} = \mathrm{Id}$. Покажите, что f это изоморфизм.

Даже если не любой морфизм деформаций обратим, в любой категории всегда можно взять максимальный подгруппоид — рассматривать только обратимые морфизмы. Таким образом, каждому объекту категории $\mathcal{B}$ можно сопоставить группоид

$\mathrm{Def}_A(B)$ деформаций A над B. Пусть $c : B' \longrightarrow B$ это морфизм в $\mathcal{B}$. Тогда по деформации $X \longrightarrow B$ можно построить деформацию $X \times_B B' \longrightarrow B'$ (либо корасслоенное произведение, в зависимости от контекста). Можно проверить, что это задаёт функтор между $\mathrm{Def}_A(B)$ и $\mathrm{Def}_A(B')$. Игнорируя пока вопрос о том, что в точности из себя представляет функтор из какой-либо категории в категорию группоидов (или в категорию категорий вообще: между морфизмами существуют естественные преобразования, и их надо учитывать, говоря про то, как функтор ведёт себя по отношении к композиции морфизмов). Но, (по крайней мере если наши категории эквивалентны малым) множество классов изоморфизма $\pi_0 \mathrm{Def}_A$ это корректно определённый функтор из $\mathcal{B}$ в категорию множеств $\mathcal{SET}$. **Пространство модулей деформаций** A это представляющий объект M для функтора $B \mapsto \pi_0 \mathrm{Def}_A(B)$.

Представляющий объект существует далеко не всегда. Впрочем, зачастую эту проблему можно решить ценой увеличения рассматриваемых категорий: например, рассматривая дг-алгебры вместо обычных алгебр или стеки вместо схем. Конечно, всегда можно добиться представимости, работая внутри категории функторов $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{SET}$, но обычно хочется найти категорию, связанную с $\mathcal{B}$ наиболее тесным образом.

Давайте рассмотрим несколько конкретных примеров и увидим, как дг-алгебры ли естественно возникают во многих задачах, связанных с локальными описаниями деформаций. Мы будем работать над полем k характеристики ноль. Мы будем предполагать, что оно алгебраически замкнуто — это избавляет от необходимости каждый раз проговаривать, что происходит при расширении базового поля. Под **маленькой алгеброй** мы будем понимать артинову локальную алгебру с единицей $(A, \mathfrak{m})$ и полем вычетов $A/\mathfrak{m} = k$. Они будут служить базами наших деформаций. Заметим, что, раз A это k-алгебра, то последовательность $k \longrightarrow A \longrightarrow k$, где первая стрелка — это вложение единицы, а вторая — факторизация, расщепляется, как последовательность k-векторных пространств. Следовательно, $\mathcal{A} = k \oplus \mathfrak{m}$ как k-алгебра, более того, это разложение каноническое. Будем называть категорию маленьких алгебр $\mathcal{ART}$.

Пример, полезный при изучении большого числа ситуаций, это деформации дифференциала в комплексе векторных пространств над k. Напомним, что **градуированное векторное пространство** V над k это набор пространств V^i, занумерованный множеством целых чисел. **Тензорным произведением** градуированных векторных пространств V и W мы будем называть градуированное векторное пространство $V \otimes W$, для которого $(V \otimes W)^n := \oplus_{i+j=n} V^i \otimes W^j$. Заметим, что мы берём именно прямую сумму: можно было бы взять, например, прямое произведение. В дальнейшем будет важно обращать внимание на это различие, но пока заметим, что если хотя бы одно из пространств **ограниченно** (то есть $V^i = 0$ при $|i| >> N$ для какого-то N, то получается одно и то же. Через $k[n]$ мы будем обозначать градуированное пространство такое, что $k[n]^{-n} = k$ и $k[n]^j = 0$ при $j \neq n$. Образующую пространства $k[n]^{-n}$ мы будем обозначать буквой s^n. **Сдвиг** пространства V это тензорное произведение $V[n] := k[n] \otimes V$. Элемент $v \in V^i$ мы будем называть **однородным элементом** степени i и мы будем обозначать $|v| := i$. Для двух градуированных векторных пространств V и W мы будем обозначать через $\tau_{V,W}$ изоморфизм $V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$, действующий по формуле

$$\tau_{V,W}(v \otimes w) = (-1)^{|v||w|}(w \otimes v) \tag{1}$$

для двух однородных элементов $v \in V, w \in W$.

Помимо морфизмов, сохраняющих градуировку, можно рассматривать **внутренние морфизмы:** пусть V и W это два градуированных векторных пространства: тогда через $\mathrm{Hom}(V, W)$ мы обозначим градуированное векторное пространство с

$$\mathrm{Hom}^n(V, W) := \prod_{i \in \mathbb{Z}} Hom(V^i, W^{i+n}). \tag{2}$$

Категория градуированных векторных пространств с сохраняющими градуировку морфизмами (то есть, $Hom(V, W) := \mathrm{Hom}^0(V, W)$) — это пример того, что называется *замкнутая симметрическая моноидальная категория.* Слово "замкнутая"здесь обозначает, что есть естественный изоморфизм (трифункторов)

$$c : Hom(V \otimes W, U) \longrightarrow Hom(V, \mathrm{Hom}(W, U)),$$

действующий по формуле $c(\alpha)(v)(w) = \alpha(v \otimes w)$. Для внутреннего хома $\mathrm{Hom}(X, Y)$ определено отображение действия $\mathrm{Hom}(X, Y) \otimes X \longrightarrow Y$, которое сопряжено тождественному отображению в $Hom(\mathrm{Hom}(X, Y), \mathrm{Hom}(X, Y)$, и которое действует, естественно, по формуле $f \otimes x \mapsto f(x)$. Наконец, для четвёрки объектов X, Y, A, B у нас есть отображение

$$\mathrm{Hom}(X, A) \otimes \mathrm{Hom}(Y, B) \otimes X \otimes Y \longrightarrow A \otimes B, \tag{3}$$

которое получается перестановкой двух сомножителей в серединке и применением двух отображений вычисления. По сопряженности образуется морфизм

$$\mathrm{Hom}(X, A) \otimes \mathrm{Hom}(Y, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X \otimes Y, A \otimes B), \tag{4}$$

действующий по правилу

$$f \otimes g(a \otimes b) = (-1)^{|g||a|} f(a) \otimes g(b). \tag{5}$$

Обратите внимание на знак! Ради него и заводилось всё занудство: чтобы проиллюстрировать, как знаки приходят из рассмотрения симметрической моноидальной категории градуированных векторных пространств. В качестве следствия, получаем объяснение знакам, возникающих на сдвигах: если $f \in \mathrm{Hom}^k(X,Y)$, то соответствующий ему морфизм $f[n] \in \mathrm{Hom}^k(X[n],Y[n])$ действует по правилу $f(s^n x) = (-1)^{|k||n|}f(x)$. Обратите внимание на то, что мы положили $X[n] := k[n] \otimes X$, а не $X \otimes k[n]$. Это выбор абсолютно произвольный, и эти два определения сдвига дают разные знаки в формулах, но выбор первого варианта, кажется, стандартный и в литературе преобладает именно он.

Упражнение 4: (Для тех, кто знает, что такое замкнутая модельная категория). Постройте для замкнутой модельной категории ассоциативную операцию композиции на внутренних гомоморфизмах $\mathrm{Hom}(Y,Z) \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$ и покажите, что в категории градуированных векторных пространств композиция равна обычной композиции операторов.

Таким образом, $\mathrm{Hom}(X,X)$ это ассоциативная алгебра. Введём на ней операцию коммутатора по формуле $[f,g] := fg - (-1)^{|f||g|}gf$.

Пример 5: Комплекс это градуированное k-векторное пространство V вместе с оператором $d \in \mathrm{Hom}^1(V,V)$ таким, что $d^2 = 0$. Деформацией комплекса V над A назовём комплекс свободных A-модулей $(\overline{V}, \overline{d})$, снабжённый изоморфизмом $\varphi : \overline{V}/\mathfrak{m}\overline{V} \longrightarrow V$ комплексов k-векторных пространств. Разложение $A = k \oplus \mathfrak{m}$ индуцирует разложение $\overline{V} = V \oplus V \otimes \mathfrak{m}$. Напишем в этом разложении $\overline{d} = d + m$, где $m \in \mathrm{Hom}^1(V \otimes \mathfrak{m}, V \otimes \mathfrak{m})$. Тогда из уравнения $\overline{d}^2 = 0$ следует

$$\overline{d}^2 = (d+m)^2 = d^2 + md + dm + m^2 = [d,m] + \frac{1}{2}[m,m] = 0. \tag{6}$$

То есть, m удовлетворяет **уравнению Маурера-Картана**. Напротив, любой элемент $m \in \mathrm{End}^1(V \otimes \mathfrak{m})$ задаёт деформацию комплекса V над A по формуле $\overline{d} = d + m$. Посмотрим, когда элементы m_1 и m_2 задают изоморфные деформации. По определению, это значит, что между комплексами $(V \otimes A, d+m_1)$ и $(V \otimes A, d+m_2)$ существует морфизм $F \in Hom(V \otimes A, V \otimes A)$. такой, что $F/\mathfrak{m} = \mathrm{Id}_V$. Пусть $L = \log F$, тогда $F = \exp(L)$, и условие на то, что F это морфизм комплексов, принимает вид

$$\exp(L)(d+m_1)\exp(-L) = d + m_2. \tag{7}$$

В такой ситуации мы будем говорить, что m_1 и m_2 **калибровочно эквивалентны**

Упражнение 6: Докажите, что операции взятия логарифма и экспоненты легитимны. То есть, если V это свободный A-модуль и $F : V \longrightarrow V$ такой его эндоморфизм, что $F/\mathfrak{m} = \mathrm{Id}$, то существует такой эндоморфизм L, что $\exp(L) := \sum_k \frac{1}{k!}L^k = F$. Покажите, что $\exp(L)\exp(M) = \exp(L+M)$, если эндоморфизмы L и M коммутируют между собой. Как следствие, покажите, что для любого эндоморфизма G верно, что $\exp(L)G\exp(-L) = \exp(\mathrm{ad}_L)G$, где ad_L это оператор в пространстве эндоморфизмов, действующий по формуле $\mathrm{ad}_L(G) := [L, G]$.

На самом деле, вместо нильпотентой алгебры и свободного модуля можно взять $\mathfrak{m}$-адически полную алгебру и $\mathfrak{m}$-адически полный модуль.

Рассмотрим отдельно случай, когда A это алгебра дуальных чисел $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Тогда для элемента $m \in \mathrm{End}^1(V \otimes \varepsilon) = \mathrm{End}^1(V)$ уравнение Маурера-Картана принимает вид $[d, m] = 0$, а экспонента элемента $L \in \mathrm{End}^0(V \otimes \varepsilon)$ имеет вид $\exp(L) := \mathrm{Id} + L$. Из вычисления

$$\exp(L)(d + m_1)\exp(-L) = (\mathrm{Id} + \mathrm{ad}_L)(d + m_1) = m_1 + [L, d] = m_2 \tag{8}$$

следует, что коциклы m_1 и m_2 задают изоморфные деформации над дуальными числами если и только если они когомологичны. Пространство $H^1(\mathrm{End}(V))$ естественно называть **касательным пространством** к пространству модулей деформаций.

Изучим теперь деформации ассоциативных алгебр. Для начала опишем такую конструкцию: пусть V это векторное пространство. Обозначим через $HH^n(V)$ пространство

$$HH^n(V) := Hom(V^{\otimes n+1}, V). \tag{9}$$

Определим операцию $\circ_j : HH^n(V) \otimes HH^m(V) \longrightarrow HH^{n+m-1}(V)$ для $j \in [0, n]$ как подстановку одной из операций на i-тое место:

$$f \circ_i g(v_0 \otimes \cdots \otimes v_{n+m-1}) := f(v_0 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes g(v_i \otimes \cdots \otimes v_{i+m}) \otimes v_{i+m+1} \otimes \cdots \otimes v_{n+m-1}). \tag{10}$$

Теперь определим не зависящую от выбора j операцию $\circ$ как

$$f \circ g := \sum_{j=0}^{n} (-1)^{mj} f \circ_j g. \tag{11}$$

И, наконец, определим скобку $[f, g]$ как

$$[f, g] := f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f. \tag{12}$$

Утверждение, которое не очень трудно доказать напрямую, но которое мы докажем позже с чуть более концептуальной точки зрения, состоит в том, что операция $[\cdot, \cdot]$ задаёт структуру градуированной алгебры ли на $HH(V)$. Если V конечномерна, то эта алгебра ли связана с алгеброй ли дифференцирований свободной алгебры, порождённой $V^*[1]$; в общем случае её всегда можно описать как алгебру *кодифференцирований тензорной коалгебры*, но про коалгебры мы поговорим чуть позже.

Рассмотрим, как ведёт себя операция $[\cdot,\cdot]$ в некоторых частных случаях. В ограничении на $HH^0 = Hom(V,V)$ это просто коммутатор операторов. Если $f \in HH^0$ и $g \in HH^1$, то $f \circ g(a,b) = f(g(a,b))$ и $g \circ f(a,b) = g(f(a),b) + g(a,f(b))$. Наконец, нам понадобится вычисление $[f,f]$ для $f \in HH^1$. Из формул следует, что

$$\frac{1}{2}[f,f](a,b,c) = f \circ f(a,b,c) = f(f(a,b),c) - f(a,f(b,c)). \tag{13}$$

Мы готовы дать определение ассоциативной алгебры!

Пример 7: Ассоциативная алгебра (без единицы) над k это пространство V вместе с заданным элементом $\mu \in HH^1(V)$ таким, что $[\mu,\mu] = 0$. Плоские деформации над A описываются теперь так же, как и в случае комплексов: это такие элементы $m \in HH^1(V \otimes \mathfrak{m})$, что $[\mu+m,\mu+m] = 0$, а морфизмы между дифференцированиями это элементы из $HH^0(V \otimes \mathfrak{m})$, такие, что верен аналог формулы 7.

Заметим, что из тождества Якоби для скобки $[\cdot,\cdot]$ следует, что если элемент $\mu \in HH^1$ коммутирует сам с собой в том смысле, что $[\mu,\mu] = 0$, то оператор $\mathrm{ad}_\mu \in \mathrm{End}^1(HH(V))$ равен в квадрате нулю, превращая $HH(V)$ в комплекс. Этот комплекс называется **когомологическим комплексом Хохшильда** алгебры V. Его первые когомологии $H^1(HH(V))$ это касательное пространство к пространству модулей деформаций V.

Аналогичным же образом описываются деформации алгебры ли $\mathfrak{g}$, где соответсвующим комплексом является когомологический комплекс Шевалле-Эйленберга $CE^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ с коэффициентами в присоединённом представлении и деформации коммутативной алгебры, для которых нужно рассматривать так называемый комплекс Харрисона, в котором нужно рассматривать лиевскую степень вместо тензорной.

Другие примеры будут появляться по ходу дела, а теперь давайте аксиоматизируем ситуацию, которая проявилась уже два раза.

Определение 8: Дг-алгеброй Ли над кольцом C называется градуированный C-модуль L, снабженный операциями $d \in \mathrm{End}^1(L)$ и $[\cdot,\cdot] : L \otimes L \longrightarrow L$, удовлетворяющими следующим четырём соотношениям:

1) d превращает L в комплекс, то есть $d^2 = 0$,

2) Скобка градуированно кососкоммутативна, то есть $[a,b] = -(-1)^{|a||b|}[b,a]$,

Если $a \in L^n$, то обозначим через ad_a оператор в $\mathrm{End}^n(L)$, действующий по правилу $\mathrm{ad}_a(b) := [a,b]$. Скажем, что оператор $f \in \mathrm{End}^n(L)$ дифференцирует скобку, если $f([a,b]) = [f(a),b] + (-1)^{|f||a|}[a, f(b)]$ для любых a и b. Условия 3 и 4 формулируются так:

3) Для любого $a \in L$ оператор ad_a дифференцирует скобку,

4) Дифференциал d дифференцирует скобку.

Упражнение 9: Покажите, что для любого комплекса (L, d) комплекс $\mathrm{End}(L)$ с операциями $[f,g] := fg - (-1)^{|f||g|}gf$ и $df := \mathrm{ad}_d$ образует дг-алгебру Ли. Проверьте, что отображение $\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathrm{End}(L), \mathrm{ad}(a) \mapsto \mathrm{ad}_a$ это гомоморфизм.

Элемент $x \in L^1$ называется **элементом Маурера-Картана**, если $dx + \frac{1}{2}[x,x] = 0$. Алгебра L называется нильпотентной, если существует такое n, что для любых n элементов $(a_1, \ldots, a_n) \in L$ композиция $\mathrm{ad}_{a_1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{ad}_{a_n}$ равна нулю. В частности, операторы ad_a нильпотентны.

Заметим, что для дг-алгебры Ли L её нулевая компонента L^0 это алгебра Ли в обычном смысле слова; нильпотентной, если L сама была нильпотентна. Каждое из пространств L^i является модулем над алгеброй L^0; опять же, нильпотентным, если L такова. Нильпотентный модуль над нильпотентной алгеброй Ли можно проинтегрировать до действия группы. Утверждается, что это действие порождает дейтсвие на элементах Маурера-Картана. Чтобы его описать, предположим для начала, что дифференциал d внутренний, то есть, что существует такой элемент $\delta \in L^1$, что $\mathrm{ad}_\delta = d$. Такой элемент всегда можно формально добавить. Заметим, что x это элемент Маурера-Картана если и только если $[x+\delta, x+\delta] = 0$. **Калибровочное действие** элемента $a \in L^0$ на $x \in L^1$ задаётся формулой

$$a * x := \exp(\mathrm{ad}_a)(x + \delta) - \delta. \tag{14}$$

Упражнение 10: Докажите, что если $D \in \mathrm{End}(L)$ дифференцирует скобку в нильпотентной алгебре Ли, то $\exp(D)$ её сохраняет.

Из упражнения следует, что $a*x$ это элемент Маурера-Картана, поскольку ad_a это дифференцирование, а автоморфизмы алгебры ли сохраняют квадратичный конус $[z,z] = 0$.

Мы будем обозначать через $\mathrm{MC}(L)$ множество элементов Маурера-Картана в L, а калибровочную группу $\exp(L^0)$ через $\mathfrak{G}(L)$. Заметим, что если L это любая дг-алгебра Ли над k, а $(A, \mathfrak{m})$ - маленькая k-алгебра, то $L \otimes \mathfrak{m}$ с операциями, распространёнными

A-линейно, это нильпотентная алгебра Ли. **Деформационный функтор** из категории маленьких алгебр в категорию множеств это функтор $\mathrm{Def}_L : \mathcal{ART} \longrightarrow \mathcal{SET}$, который действует как

$$\mathrm{Def}_L(A) = \frac{\mathrm{MC}(L)}{\mathfrak{G}(L)}. \tag{15}$$

Будем говорить, что функтор F из категории $\mathcal{ART}$ в категорию $\mathcal{SET}$ представляется дг-алгеброй Ли L, если F изоморфен Def_L. Старинный принцип, авторство которого обычно приписывается П.Делиню, В.Дринфельду и Б.Фейгину, гласит, что любой достаточно естественный функтор $\mathcal{ART} \longrightarrow \mathcal{SET}$ представим некоторой дг-алгеброй Ли. Нынче это утверждение стараниями В.Хинича и Д.Придхама (стоит отметить так же работы М.Манетти и Д.Лурье) имеет форму теоремы. В этом курсе мы не будем её доказывать, но, что мы имеем в виду под достаточно естественным функтором, в ближайшие пару лекций мы сформулируем. Сразу скажем, что для формулировки нам придётся перейти к производным версиям категорий: вместо маленьких алгебр рассматривать нильпотентные дг-алгебры, а вместо множеств - симплициальные множества или хотя бы группоиды.

Завершим упоминанием двух классических работ. Теорема Гротендика 1960 года гласит, что функтор из $\mathcal{ART}$ в $\mathcal{SET}$, сохраняющий конечные пределы, *пропредставим*. Без перехода к про-объектам здесь обойтись нельзя, как показывает самый простой пример деформации точки на прямой: $\mathrm{Spec}\, A$-параметризованные семейства точек на $\mathbb{A}^1$ это гомоморфизмы $k[x] \longrightarrow A$. Деформации некоторой конкретной точки на прямой тогда задаются гомоморфизмами $k[[x]] \longrightarrow A$, и $k[[x]]$ это пропредставляющий объект — но это именно что проконечномерная алгебра. Описанная ситуация скорее типична.

Шлезингер в 1968 году ослабил условие коммутированния с прямыми пределами. Назовём отображение маленьких алгебр $B \longrightarrow A$ **маленьким расширением**, если оно сюръективно и его ядро I тривиально как $\mathfrak{m}_B$-модуль. Для морфизмов маленьких алгебр $a : A \longrightarrow C$ и $b : B \longrightarrow C$ и функтора F обозначим естественное отображение $F(A \times_C B) \longrightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$ через $N(A, B, C)$. Аксиомы Шлезингера для пропредставимости функтора $F : \mathcal{ART} \longrightarrow \mathcal{SET}$ формулируются так:

H0) $F(k) = \{*\}$,

H1) $N(A, B, C)$ сюръективно, если b это маленькое расширение,

H2) $N(A, k[t]/(t^2), k)$ биективно,

H3) $N(k[t]/(t^2), k[t]/(t^2), k)$ биективно и получившееся k-векторное пространство $F(k[t]/(t^2))$ конечномерно, H4) $N(A, A, C)$ биективно, если $a = b$ это маленькое расширение.

В аксиоме H3) Сложение на множестве $F(k[t]/(t^2))$ строится так: морфизм колец $k[t]/(t^2) \times_k k[t]/(t^2) \longrightarrow k[t]/(t^2), (a+bt, a+ct) \mapsto a+(b+c)t$ индуцирует морфизм множеств $F(k[t]/(t^2) \times_k k[t]/(t^2)) \longrightarrow F(k[t]/(t^2))$. Композиция с $(N(k[t]/(t^2), k[t]/(t^2), k))^{-1}$ задаёт сложение. Действие поля приходит из действия k^* автоморфизмами $t \mapsto ct$. Пространство $F(k[t]/(t^2))$ называют касательным пространством к функтору F.