Топологические пространства и операции над ними

1. Введите топологию на следующих пространствах и докажите, что все они гомеоморфны (вещественное проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$):

   a) прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящие через начало координат;

   b) сфера $\mathbb{S}^n$ с отождествлёнными противоположными точками;

   c) диск $\mathbb{D}^n$ с отождествлёнными противоположными точками на границе.

2. Введите топологию на следующих пространствах и докажите, что все они гомеоморфны (комплексное проективное пространство $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$):

   a) комплексные прямые в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящие через начало координат;

   b) фактор сферы $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \colon |z_0| + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ по действию окружности $\mathbb{S}^1 = \{t \in \mathbb{C} \colon |t| = 1\} : t \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (tz_0, \ldots, tz_n)$.

3. Докажите, что:

   a) $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ гомеоморфно $\mathbb{S}^1$;

   b) $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2$;

   c) Определите топологическое пространство $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ и докажите, что $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$ гомеоморфно $\mathbb{S}^4$;

   d) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ гомеоморфно листу Мёбиуса с приклеенным по граничной окружности диском.

4. Докажите, что:

   a) Пространство всевозможных прямых на плоскости гомеоморфно листу Мёбиуса;

   b) Группа $SO(3)$ (конфигурационное пространство твёрдого тела с одной закреплённой точкой в пространстве) гомеоморфно $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

5. Пусть X и Y — два топологических пространства. Обозначим через $i_X \colon X \to X \sqcup Y$ и $i_Y \colon X \to X \sqcup Y$ естественные вложения. Докажите, что дизъюнктное объединение обладает следующим универсальным свойством: для любого топологического пространства Z и непрерывных отображений $f_X \colon X \to Z$ и $f_Y \colon Y \to Z$ существует и единственно непрерывное отображение $f \colon X \bigsqcup Y \to Z$ такое, что $f \circ i_X = f_X$ и $f \circ i_Y = f_Y$. Картинка:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "i_Y"] \arrow[ddr, "f_Y"] & \\
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[drr, "f_X"'] & X \bigsqcup Y \arrow[dr, dotted, "f"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

6. Пусть X и Y — два топологических пространства. Обозначим через $p_X\colon X\times Y\to X$ и $p_Y\colon X\times Y\to Y$ естественные проекции. Докажите, что декартово произведение обладает следующим универсальным свойством: для любого топологического пространства Z и непрерывных отображений $f_X\colon Z\to X$ и $f_Y\colon Z\to Y$ существует и единственно непрерывное отображение $f\colon Z\to X\times Y$ такое, что $p_X\circ f=f_X$ и $p_Y\circ f=f_Y$. Картинка:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, "f_Y"] \arrow[ddr, "f_X"'] & & \\
& X\times Y \arrow[r, "p_Y"'] \arrow[d, "p_X"] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

7. Докажите, что CW-комплекс компактен тогда и только тогда, когда он состоит из конечного числа клеток.

8. Докажите, что для CW-комплексов джойн ассоциативен.

9. Пусть $\underline{X}=\{X_1,\ ...\ X_n\}$ — набор CW-комплексов. Обозначим через $Z(C\underline{X},\,\underline{X})$ подпространство в произведении $\prod_{i=1}^n CX_i$, состоящее из точек, хотя бы одна координата которых лежит в основании конуса. Докажите, что $Z(C\underline{X},\,\underline{X})$ гомеоморфно $X_1*\dots*X_n$.

10. Докажите, что CW-комплекс связен тогда и только тогда, когда связен его 1-остов.

11. Докажите, что любой симплициальный комплекс с конечным числом вершин можно вложить в $\mathbb{R}^N$ для некоторого натурального N.

12. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс и $\sigma\in\mathcal{K}$ некоторый симплекс. Определим звезду $\mathrm{st}(\sigma)$ и линк $\mathrm{lk}(\sigma)$ по формулам:

$$\mathrm{st}(\sigma)=\{\tau\in\mathcal{K}\colon \tau\subset\sigma\};\qquad \mathrm{lk}(\sigma)=\{\tau\in\mathcal{K}\colon \tau\cup\sigma\in\mathcal{K};\ \tau\cap\sigma=\emptyset\}.$$

Докажите, что $\mathrm{st}(\sigma)\cong\sigma*\mathrm{lk}(\sigma)$.