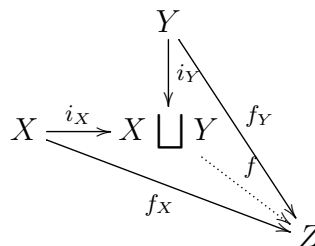
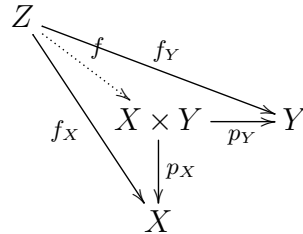


Топологические пространства и операции над ними

- Введите топологию на следующих пространствах и докажите, что все они гомеоморфны (вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$):
 - прямые в \mathbb{R}^{n+1} , проходящие через начало координат;
 - сфера S^n с отождествлёнными противоположными точками;
 - диск \mathbb{D}^n с отождествлёнными противоположными точками на границе.
- Введите топологию на следующих пространствах и докажите, что все они гомеоморфны (комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$):
 - комплексные прямые в \mathbb{C}^{n+1} , проходящие через начало координат;
 - фактор сферы $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ по действию окружности $S^1 = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\} : t \cdot (z_0, \dots, z_n) = (tz_0, \dots, tz_n)$.
- Докажите, что:
 - $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно S^1 ;
 - $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно S^2 ;
 - Определите топологическое пространство $\mathbb{H}P^n$ и докажите, что $\mathbb{H}P^1$ гомеоморфно S^4 ;
 - $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфно листу Мёбиуса с приклеенным по граничной окружности диском.
- Докажите, что:
 - Пространство всевозможных прямых на плоскости гомеоморфно листу Мёбиуса;
 - Группа $SO(3)$ (конфигурационное пространство твёрдого тела с одной закреплённой точкой в пространстве) гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.
- Пусть X и Y — два топологических пространства. Обозначим через $i_X: X \rightarrow X \sqcup Y$ и $i_Y: Y \rightarrow X \sqcup Y$ естественные вложения. Докажите, что дизъюнктное объединение обладает следующим универсальным свойством: для любого топологического пространства Z и непрерывных отображений $f_X: X \rightarrow Z$ и $f_Y: Y \rightarrow Z$ существует и единственно непрерывное отображение $f: X \sqcup Y \rightarrow Z$ такое, что $f \circ i_X = f_X$ и $f \circ i_Y = f_Y$. Картинка:



6. Пусть X и Y — два топологических пространства. Обозначим через $p_X: X \times Y \rightarrow X$ и $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ естественные проекции. Докажите, что декартово произведение обладает следующим универсальным свойством: для любого топологического пространства Z и непрерывных отображений $f_X: Z \rightarrow X$ и $f_Y: Z \rightarrow Y$ существует и единственно непрерывное отображение $f: Z \rightarrow X \times Y$ такое, что $p_X \circ f = f_X$ и $p_Y \circ f = f_Y$. Картинка:



7. Докажите, что CW -комплекс компактен тогда и только тогда, когда он состоит из конечного числа клеток.
8. Докажите, что для CW -комплексов джойн ассоциативен.
9. Пусть $\underline{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ — набор CW -комплексов. Обозначим через $Z(C\underline{X}, \underline{X})$ подпространство в произведении $\prod_{i=1}^n CX_i$, состоящее из точек, хотя бы одна координата которых лежит в основании конуса. Докажите, что $Z(C\underline{X}, \underline{X})$ гомеоморфно $X_1 * \dots * X_n$.
10. Докажите, что CW -комплекс связан тогда и только тогда, когда связан его 1-остов.
11. Докажите, что любой симплициальный комплекс с конечным числом вершин можно вложить в \mathbb{R}^N для некоторого натурального N .
12. Пусть \mathcal{K} — симплициальный комплекс и $\sigma \in \mathcal{K}$ некоторый симплекс. Определим звезду $st(\sigma)$ и линк $lk(\sigma)$ по формулам:

$$st(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{K}: \tau \subset \sigma\}; \quad lk(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{K}: \tau \cup \sigma \in \mathcal{K}; \tau \cap \sigma = \emptyset\}.$$

Докажите, что $st(\sigma) \cong \sigma * lk(\sigma)$.