Графы и поверхности

1. Докажите, что K_5 можно вложить в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

2. Как получить сферу с g ручками, склеивая попарно стороны многоугольника?

3. Докажите, что в тор можно вложить следующие графы:

   a) $K_{3,3}$;

   b) K_5;

   c) K_7;

   d) $K_{4,4}$.

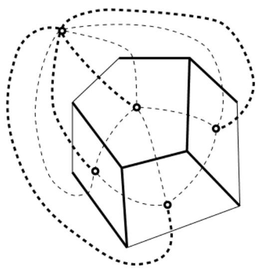
4. Докажите, что в поверхность рода 2 (сферу с двумя ручками) можно вложить граф K_8.

5. Для связного графа Γ подграф $T \subset \Gamma$ называется остовным деревом, если граф T содержит все вершины графа Γ и является связным деревом.

   a) Докажите, что для любого связного графа существует остовное дерево.

   b) Пусть T — остовное дерево в (связном) планарном графе. Докажите, что подграф T^* двойственного графа, состоящий из всех ребер, не пересекающих T, — тоже дерево.

   c) Пользуясь тем, что для дерева выполнена формула $V = E+1$, и предыдущей задачей, докажите формулу Эйлера: для связного планарного графа выполнено равенство $V - E + F = 2$.



Остовное дерево T и двойственное дерево T^*.

6. Пользуясь формулой Эйлера докажите, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

7. Докажите, что любую карту на сфере можно раскрасить в 6 цветов.

8. Пользуясь формулой Эйлера для поверхностей, докажите, что если граф Γ вложен в S_g (поверхность рода g), то имеет место формула $V - E + F = \chi(S_g)$.

9. Докажите, что граф K_n нельзя вложить в S_g, если $12(g-1) < n^2 - 7n$ (в частности, граф K_8 нельзя вложить в тор).

10. Докажите, что граф K_n можно вложить в S_g для достаточно большого g.

11. Докажите (не пользуясь теоремой классификации поверхностей), что пространства $T^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ и $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ гомеоморфны.

12. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции тора равно 7 (воспользуйтесь формулой Эйлера).

13. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции проективной плоскости равно 6 (воспользуйтесь формулой Эйлера).