

Гомотопия и гомотопическая эквивалентность

1. Докажите, что:
 - а) если $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ и $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ такие отображения, что $f_1 \simeq f_2$ и $g_1 \simeq g_2$, то $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$;
 - б) гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности.
2. Топологическое пространство называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке. Докажите, что:
 - а) если пространство стягиваемо, то оно связно;
 - б) пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{D}^n стягиваемы для любого n ;
 - в) пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда для любого топологического пространства Y и отображения $f: Y \rightarrow X$ отображение f гомотопно постоянному отображению (отображению в точку).
3. Обозначим через \mathbb{S}^∞ пространство, состоящее из бесконечных последовательностей вещественных чисел (x_1, x_2, \dots) таких, что лишь конечное число членов x_i отлично от нуля и $x_1^2 + x_2^2 + \dots = 1$. Введем на \mathbb{S}^∞ топологию, заданную стандартной евклидовой метрикой. Докажите, что \mathbb{S}^∞ стягиваемо.
4. Докажите, что следующие пространства гомотопически эквивалентны:
 - а) $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ и \mathbb{S}^n ;
 - б) лента Мёбиуса и цилиндр;
 - в) $\mathbb{R}P^{n+1} - \{\text{pt}\}$ и $\mathbb{R}P^n$; $\mathbb{C}P^{n+1} - \{\text{pt}\}$ и $\mathbb{C}P^n$;
 - д) сфера \mathbb{S}^2 с двумя отождествлёнными точками и букет $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$.
5. Докажите, что поверхность рода g с n выколотыми точками гомотопически эквивалентна букету $2g + (n - 1)$ окружностей.
6. Докажите, что:
 - а) $\Sigma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3$;
 - б) $\Sigma(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) \simeq \mathbb{S}^{n+1} \vee \mathbb{S}^{m+1} \vee \mathbb{S}^{n+m+1}$;
 - в)* $\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$, где X и Y — клеточные комплексы.
7. Докажите, что:
 - а) дополнение в \mathbb{S}^3 к паре незацепленных окружностей гомотопически эквивалентно букету сфер (каких?);
 - б) дополнение в \mathbb{S}^3 к зацеплению Хопфа (см. рис.) гомотопически эквивалентно тору.

