Фундаментальная группа

1. Докажите, что произведение петель (в точке x_0) обладает следующими свойствами:
   a) если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$, то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$;
   b) $(\phi\psi)\chi \sim \phi(\psi\chi)$ для любых петель ϕ, ψ и χ;
   c) если ε — постоянная петля, т.е. $\varepsilon(t) = x_0$ $\forall t \in [0,1]$, то для любой петли φ выполено, что $\varphi\varepsilon \sim \varphi \sim \varepsilon\varphi$;
   d) для петли φ определим петлю $\bar{\varphi}$, как $\bar{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$; тогда $\varphi\bar{\varphi} \sim \bar{\varphi}\varphi \sim \varepsilon$.

   Здесь $\sim$ обозначает гомотопическую эквивалентность петель с сохранением отмеченной точки x_0.

2. Пусть X — CW-комплекс и $a, b \in X$ — две различные точки в X. Определим множество $\mathrm{P}(a,b)$ как множество всех путей $\varphi\colon \mathrm{I} \to X$ таких, что $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$, отфакторизованное по следующему отношению эквивалентности: $\varphi \sim \varphi'$, если существует гомотопия $\Phi\colon \mathrm{I}\times\mathrm{I} \to X$, такая, что

$$\Phi(t,0) = \varphi(t);\ \Phi(t,1) = \varphi'(t);\ \Phi(0,t) = a;\ \Phi(1,t) = b$$

   для любого $0 \le t \le 1$. Определим правое действие $\pi_1(X,a)$ на $\mathrm{P}(a,b)$ по формуле

$$\varphi \circ g(t) = \begin{cases} g(2t), & 0 \le t \le 1/2; \\ \varphi(2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

   Докажите, что $\mathrm{P}(a,b)$ является торсором над $\pi_1(X,a)$, т.е. действие $\pi_1(X,a)$ на $\mathrm{P}(a,b)$ является свободным и транзитивным.

3. Докажите, что:
   a) $\pi_1(X \times Y, x \times y) \cong \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$;
   b) $\pi_1(X \vee Y, a) \cong \pi_1(X,a) \star \pi_1(Y,a)$.

4. Докажите, что для CW-комплекса X с 0-клеткой a и с остовами $\mathrm{Sk}^n X$ естественное отображение $\pi_1(\mathrm{Sk}^n X, a) \to \pi_1(\mathrm{Sk}^{n+1} X, a)$ биективно при $n > 1$ и сюрьективно при $n = 1$.

5. Докажите, что для всякого клеточного комплекса X выполнено, что $\pi_1\big(\Sigma X\big) = 0$.

6. Найдите фундаментальную группу следующих пространств:
   a) $\mathbb{S}^n$;
   b) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$;
   c) $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$;
   d) $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, где $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ – решетка полного ранга.

7. Докажите, что:

a) $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^n$ при $n \neq 2$ не гомеоморфны;

b) лента Мебиуса не ретрагируется на свою граничную окружность;

c) полноторие не ретрагируется на свою границу (тор).

8. Пусть P_g – проективная плоскость с g ручками, а K_g – бутылка Клейна с g ручками. Докажите, что:

   a) $\pi_1(P_g) \cong \langle c_1, \ldots, c_{2g+1} | c_1^2 \cdot \ldots \cdot c_{2g+1}^2 = 1 \rangle$;

   b) $\pi_1(K_g) \cong \langle c_1, \ldots, c_{2g+2} | c_1^2 \cdot \ldots \cdot c_{2g+2}^2 = 1 \rangle$;

   c) поверхности S_g, P_g и K_g попарно не гомеоморфны (указание: посчитайте абелинизацию фундаментальных групп).

9. Топологической группой называется топологическое пространство G с заданной на нем структурой группы, для которой отображения умножения $G \times G \to G$ и взятия обратного $G \to G$ непрерывны. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы всегда абелева.

10. Фундаментальной группой узла K называют фундаментальную группу его дополнения в $\mathbb{R}^3$.

    a) Докажите, что фундаментальная группа трилистника изоморфна группе с двумя образующими a, b и одним соотношением $a^2 = b^3$.

    b) Убедитесь, что фактор этой группы по коммутанту такой же как у фундаментальной группы тривиального узла.

    c) Докажите, что сами эти группы все же не изоморфны (указание: постройте сюрьекцию из фундаментальной группы трилистника на S_3) и, как следствие, трилистник невозможно развязать.