Накрытия

Все пространства предполагаются хорошими и линейно связными.

1. Любой ли сюрьективный локальный гомеоморфизм является накрытием?

2. Пусть B — триангулируемое пространство и $E \to B$ — k-листное накрытие. Докажите, что пространство E тоже триангулируемо и $\chi(E) = k\chi(B)$.

3. Пусть $p\colon (E, e) \to (B, b)$ — накрытие; $p_*\colon \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ — соответствующее вложение фундаментальных групп. Докажите следующие утверждения:
   a) класс петли $\alpha\colon (S^1, 1) \to (B, b)$ лежит в подгруппе $p_*\pi_1(E, e)$ тогда и только тогда, когда поднятие $\widetilde{\alpha}$ петли α в пространство (E, e) есть петля;
   b) число точек в прообразе $p^{-1}(b)$ равно индексу подгруппы $p_*\pi_1(E, e)$ в $\pi_1(B, b)$.

4. Пусть $p\colon (E, e) \to (B, b)$ — накрытие и $f\colon (Z, z) \to (B, b)$ — некоторое отображение. Докажите, что существует не более одного отображения $g\colon (Z, z) \to (E, e)$ такого, что $p \circ g = f$ (говорят, что g — поднятие отображения f).

5. В условиях предыдущей задачи, дополнительно предположим, что пространство Z локально линейно связно (т.е. у каждой точки найдется сколь угодно малая линейно связная окрестность). Докажите, что для существования поднятия g необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение
$$f_*\pi_1(Z, z) \subset p_*\pi_1(E, e).$$

6. Пусть $p\colon (\widetilde{B}, \tilde{b}) \to (B, b)$ — универсальное накрытие (т.е. $\pi_1(\widetilde{B}, \tilde{b}) = 0$). Докажите, что для любого другого накрытия $q\colon (E, e) \to (B, b)$ существует накрытие $r\colon (\widetilde{B}, \tilde{b}) \to (E, e)$ такое, что $q \circ r = p$.

7. Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма накрытий над фиксированным пространством X и классами сопряженности подгрупп в $\pi_1(X)$.

8. Пусть X — линейно связное, локально линейно связное пространство с конечно порожденной фундаментальной группой (например, X является связным конечным клеточным комплексом). Докажите, что любое отображение $X \to \mathrm{S}^1$ гомотопно постоянному тогда и только тогда, когда любой элемент из абеленизации фундаментальной группы имеет конечный порядок.

Напомним, что накрытие $p\colon (E, e) \to (B, b)$ называется регулярным, если $p_*\pi_1(E, e)$ является нормальной подгруппой в $\pi_1(B, b)$.

8a. Докажите, что двулистные накрытия регулярны.

8b. Постройте пример нерегулярного трехлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.

9. Докажите, что накрытие $p\colon (E,e) \to (B,b)$ регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в базе не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути (не обязательно с началом в e) в тотальном пространстве E.

10. Напомним, что действие группы G на топологическом пространстве X называется дискретным, если для любой точки $x \in X$ найдется такая открытая окрестность $x \in U$, что для любых $g_1, g_2 \in G,\ g_1 \neq g_2$ множества g_1U и g_2U не пересекаются. Докажите, что:

    a) если $p\colon (E,e) \to (B,b)$ — регулярное накрытие, то существует свободное действие группы $G = \pi_1(B,b)/p_*\pi_1(E,e)$ такое, что $E/G = B$ (точнее, орбиты действия группы G совпадают с множествами $p^{-1}(b'),\ b' \in B$).

    b) если группа G действует на топологическом пространстве E свободно и дискретно, то естественная проекция $p\colon E \to E/G$ является регулярным накрытием со слоем, биективным G. Более того, $\pi_1(E/G)/p_*\pi_1(E) \cong G$.

11. Постройте накрытие букета двух окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету n окружностей при $n \geq 2$. Выведите из этого, что свободная группа на двух образующих содержит в качестве подгруппы свободную группу с любым конечным числом образующих.

12. Докажите, что свободная группа на двух образующих содержит в качестве подгруппы свободную группу со счетным числом образующих.

13. Докажите, что подгруппа свободной группы свободна.

14. Когда сферу с G ручками можно накрыть сферой с g ручками?

15. Постройте универсальное накрытие над

    a) $\mathrm{S}^1 \vee \mathrm{S}^2$;

    b) $\mathrm{S}^1 \vee \mathrm{S}^1$;

    c) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

16. Укажите накрытие тора, соответсвующее подгруппе $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T)$.