

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 7.**  
**Связности в векторных расслоениях. 18.04.2023.**

**Задача 1.** Доказать, что в любом векторном расслоении существует связность.

**Задача 2.** Пусть  $\nabla^1$  и  $\nabla^2$  связности в векторных расслоениях  $E_1 \rightarrow M$  и  $E_2 \rightarrow M$  соответственно.

Доказать, что операция  $\nabla^1 \oplus \nabla^2$ , определённая как  $\nabla^1 \oplus \nabla^2(s_1 + s_2) = \nabla^1 s_1 + \nabla^2 s_2$ ,  $s_i \in \Gamma(M, E_i)$ , является связностью в  $E_1 \oplus E_2$ . Найти локальную 1-форму связности  $\nabla^1 \oplus \nabla^2$ .

Доказать, что операция  $\nabla^1 \otimes \nabla^2$ , определённая как  $\nabla^1 \otimes \nabla^2(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2$ ,  $s_i \in \Gamma(M, E_i)$ , является связностью в  $E_1 \otimes E_2$ . Найти локальную 1-форму связности  $\nabla^1 \otimes \nabla^2$ .

**Задача 3.** Пусть  $\nabla$  связность в векторном расслоении  $E \rightarrow M$ . Пусть  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  естественное спаривание сечения расслоения  $E$  и сечения двойственного ему расслоения  $E^*$ . Определим операцию  $\nabla^*$  из условия, что тождество  $d\langle s, t \rangle = \langle \nabla s, t \rangle + \langle s, \nabla^* t \rangle$  верно для любых  $s \in \Gamma(M, E)$ ,  $t \in \Gamma(M, E^*)$ . Доказать, что это связность в  $E^*$ . Найти локальную 1-форму этой связности.

**Задача 4.** Пусть  $\nabla^1$  и  $\nabla^2$  связности в векторных расслоениях  $E_1 \rightarrow M$  и  $E_2 \rightarrow M$  соответственно. Связность в расслоении  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  можно ввести с помощью изоморфизма  $\text{Hom}(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2$  и предыдущих задач. Проверьте, что это то же самое, что определить связность формулой  $(\nabla f)(s_1) = \nabla^2(f(s_1)) - f(\nabla^1 s_1)$ , где  $f \in \Gamma(M, \text{Hom}(E_1, E_2))$ ,  $s_1 \in \Gamma(M, E_1)$ .

**Задача 5.** Докажите, что описанные в предыдущих задачах продолжения согласованных с метрикой связностей на прямые суммы, тензорные произведения и т.д. евклидовых (унитарных) расслоений снова будут согласованы с соответствующими метриками.

**Задача 6.** Пусть  $\phi : N \rightarrow M$  гладкое отображение, а  $\nabla^E$  связность в векторном расслоении  $E \rightarrow M$ . Докажите, что равенство  $\nabla^{\phi^* E}(f\phi^* s) = df \otimes \phi^* s + f\phi^*(\nabla^E s)$ , где  $f \in C^\infty(N)$ ,  $s \in \Gamma(M, E)$ , определяет связность  $\nabla^{\phi^* E}$  на расслоении  $\phi^* E$  (обратный образ связности).

**Задача 7.** Написать явно формулу преобразования для локальных коэффициентов связности  $\omega_{i,\beta}^\alpha$  и 1-форм  $\omega_\beta^\alpha$  при заменах базиса  $e_\alpha$  в сечениях расслоения и базиса  $\varepsilon_i$  в векторных полях на базе расслоения.

**Задача 8.** Пусть  $\omega$  локальная 1-форма связности. Доказать, что из того, что  $\omega$  преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу  $\tilde{\omega} = T^{-1}\omega T + T^{-1}dT$ , следует, что матрица кривизны  $F = d\omega + \omega \wedge \omega$  преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу  $\tilde{F} = T^{-1}FT$ , а потому «склеивается» в корректно определённую глобальную 2-форму со значениями в эндоморфизмах.

**Задача 9.** Доказать, что значение формы кривизны на векторных полях  $X$  и  $Y$  может быть вычислено по формуле  $F(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ , то есть если  $s \in \Gamma(U, \xi)$ , то  $F(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s$ .

**Задача 10.** Пусть у нас есть связность  $\nabla$  в расслоении  $E$ . Продолжим её до связности  $\nabla^{\text{End}(E)}$  в расслоении  $\text{End}(E)$ . Докажите тождество Бьянки  $\nabla^{\text{End}(E)} F = 0$ . Перепишите это как соотношение на кривизну и 1-форму связности.