НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9. Геодезические. 16.05.2023.

Задача 1. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что* $I_1 = \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ *является первым интегралом. Докажите, что есть второй первый интеграл* $I_2 = x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}y$ *и с его помощью найдите* $y(x)$.

Задача 2. Доказать, что $\gamma_{A,X}(t) = \exp_A tX$, и найти длину геодезической $\exp_A tX$, где $X \in T_AM$, от точки A до точки $\exp_A t_0X$.

Задача 3. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_AM \longrightarrow M$ не является а) сюръективным, б) инъективным.

Задача 4. Докажите, что на римановом многообразии в полугеодезических координатах $x^1,\dots,x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} g_{ij}dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \mathrm{const}$, $\dots$, $x^{n-1} = \mathrm{const}$, $x^n = t$ являются геодезическими с натуральным параметром t.

Задача 5. Докажите, что при достаточно малых $\delta > 0$ геодезическая $\exp_A tv$ и называемое геодезической сферой радиуса δ с центром в точке A подмногообразие $\exp_A(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_AM | |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 6. Рассмотрим геодезические координаты $x^1,\dots,x^n$ на римановом многообразии, центрированные в точке A, то есть определённые с помощью отображения $\exp_A$. Доказать, что в этих геодезических координатах геодезические, проходящие через точку A, имеют вид $x^i = a^it$, где a^i — некоторые константы.

Доказать, что в геодезических координатах символы Кристоффеля в точке A обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Доказать, что центрированные в точке A координаты $x^1,\dots,x^n$, то есть такие координаты, что $A = (0,\dots,0)$, определённые в окрестности $U \ni A$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке A, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk}x^jx^k \equiv 0$ тождественно по $x^1,\dots,x^n$ в U.

Задача 7. Доказать, что геодезические в произвольной перепараметризации, лежащие на многообразии M и проходящие через заданные точки A и B, совпадают с экстремалями функционала длины

$$L[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left|\frac{d\gamma}{dt}(t)\right| dt,$$

где $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$.

Задача 8. Докажите, что геодезические в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не имеют сопряженных точек.

Задача 9. Доказать, что кратность сопряжённых точек меньше размерности многообразия. Доказать, что точки, сопряжённые данной точке на данной геодезической, являются изолированными.

Задача 10. Вариация называется геодезической, если для каждого значения параметра вариации соответствующая кривая является геодезической. Докажите, что якобиевы поля — это в точности поля вариации геодезических вариаций. Докажите, с помощью этого, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.