НМУ, Алгебра-2
Листок 1. 20.02.2023

Задача 1.
Для каких натуральных n многочлен $\frac{x^n-1}{x-1}$ неприводим над $\mathbb{Q}$?
Задача 2.
Пусть $f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$ — неприводимый многочлен степени $n > 1$ над $\mathbb{Q}$. Докажите, что если $f(x)$ имеет корень на единичной окружности, то n чётно и $c_k = c_{n-k}$ для всех k (в частности, $c_0 = 1 =: c_n$).
Задача 3.
Для простого p и $a \in \mathbb{F}_p$ обозначим через $\left(\frac{a}{p}\right)$ символ Лежандра, то есть 1, если $a = b^2$ для ненулевого $b \in \mathbb{F}_p$, 0, если $a = 0$, и -1 иначе.

а) Докажите, что при $p > 2$ выполнено
$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}.$$

б) Докажите, что
$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right).$$

Задача 4.
Пусть K — поле, содержащее примитивный корень из 1 степени 8. Докажите, что K содержит элемент α такой, что $\alpha^2 = 2$. Выведите отсюда равенство
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$$
для $p > 2$.
Задача 5.
Пусть элементы a, b и ab поля K не являются квадратами. Докажите, что если $\operatorname{char} K \neq 2$, то $K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = K(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. Верно ли это для $\operatorname{char} K = 2$?
Задача 6.
Пусть $f(x), g(x)$ — многочлены над полем K. Докажите, что они взаимно просты тогда и только тогда, когда не существует расширения $L \supset K$, в котором у них есть общий корень.
Задача 7.
Пусть q — степень простого числа. Сколько существует неприводимых многочленов степени 42 над $\mathbb{F}_q$?
Задача 8. Какова степень поля разложения

а) Многочлена $x^4 - 206x^2 + 10593$ над $\mathbb{F}_{17}$?

б) Многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$ над $\mathbb{Q}$?