НМУ, Алгебра-2
Листок 3. 06.03.2023

Задача 1.
Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — корни приведенного полинома $f(x)$ (с учетом кратности), $p_m = \sum_i \alpha_i^m$. Докажите, что

$$\operatorname{disc}(f) = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ p_{n-1} & p_n & \dots & p_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Задача 2.
Для всех $n \geq 2$ вычислите дискриминант полинома $\frac{x^n-1}{x-1}$.

Задача 3.
Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — элементарные симметрические полиномы, $p_1, \ldots, p_n$ — соответствующие суммы степеней. Докажите, что

$$p_n = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & \dots & 0 \\ 2s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (n-1)s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & 1 \\ ns_n & s_{n-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix}$$

Задача 4.
Пусть p — простое число, g — образующая мультипликативной группы $\mathbb{F}_p^*$. Докажите, что отображение $x \mapsto (gx \mod p)$ — нечётная перестановка. Выведите отсюда, что для любого $a \in \mathbb{F}_p^*$ отображение $x \mapsto (ax \mod p)$ имеет чётность $\left(\frac{a}{p}\right)$.

Задача 5.
Пусть p, q — различные нечётные простые числа. Рассмотрим отображения

$$\tau : \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \tau(x) = (x \mod p, x \mod q),$$

$$\sigma_p : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \sigma_p(a,b) = (a, a+pb)$$

$$\sigma_q : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \sigma_q(a,b) = (b+aq, b).$$

а) Пусть $\pi = \tau^{-1}\sigma_q\sigma_p^{-1}\tau$ — перестановка множества $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Докажите, что её знак равен $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)$.

б) Вычислите знак перестановки π явно и докажите квадратичный закон взаимности:
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Задача 6.
Докажите, что всякая конечная p-группа нильпотентна.

Задача 7.
Пусть p — простое число. Предъявите автоморфизм φ поля $\overline{\mathbb{F}}_p$, не являющийся степенью автоморфизма Фробениуса.