НМУ, Алгебра-2
Листок 5. 20.03.2023

Задача 1.
Докажите, что если подгруппа $H \subset S_n$ транзитивна, то $|H|$ делится на n.
Задача 2.

а) Пусть a, b — алгебраические над K элементы $\overline{K}$, имеющие взаимно простые степени. Докажите, что $[K(a,b) : K] = [K(a) : K][K(b) : K]$.

б) Докажите, что для всех простых p степень $\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}]$ над $\mathbb{Q}$ равна $p(p-1)$.

Задача 3.
Для каких простых p поле $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ имеет кубическое над $\mathbb{Q}$ подрасширение? Найдите какие-нибудь $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_p)$, порождающие эти подрасширения для $p = 7, 13$ и выпишите их минимальные многочлены.
Задача 4.
Пусть p — нечётное простое число. Рассмотрим элемент

$$G(p) = \sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) \zeta_p^n \in \mathbb{Z}[\zeta_p].$$

Покажите, что $G(p)^2$ — целое число и найдите это число явно.
Задача 5.

а) Пусть $(a,p) = 1$ и σ_a — автоморфизм поля $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, переводящий ζ_p в ζ_p^a. Вычислите $\sigma_a(G(p))$.

б) Докажите, что для нечётного простого $q \neq p$ в кольце $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ выполнено сравнение
$$G(p)^q \equiv \sigma_q(G(p)) \pmod{q}.$$

в) Докажите *квадратичный закон взаимности*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

Задача 6.
Пусть K/L — конечное расширение. Покажите, что оно является расширением Галуа тогда и только тогда, когда $|\mathrm{Aut}(K/L)| = [K : L]$.
Задача 7.
Пусть K — произвольное поле, $F = K(x)$ — поле рациональных функций над K от одной переменной.

а) Докажите, что автоморфизмы $f(x) \mapsto f(1/x)$ и $f(x) \mapsto f(1-x)$ порождают конечную подгруппу $G \subset \mathrm{Aut}(F)$. Опишите G как абстрактную группу.

б) Постройте такую функцию $g(x) \in F$, что $F^G = K(g(x))$.