НМУ, Алгебра-2
Листок 6. 27.03.2023

Задача 1.
Пусть K — поле характеристики p, $a \in K$ и $f(x) = x^p - x + a$.

а) Докажите, что $f(x)$ либо раскладывается на линейные над полем K, либо неприводим.

б) В ситуации, когда f неприводим, опишите его группу Галуа.

Задача 2.
Пусть n — натуральное число. Вычислите дискриминант многочлена

$$F_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Задача 3.
Пусть $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и x_1, x_2, x_3, x_4 — его корни с учётом кратности. Докажите, что для $g(x) = (x - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4))(x - (x_1 + x_3)(x_2 + x_4))(x - (x_1 + x_4)(x_2 + x_3))$ справедлива формула

$$g(x) = x^3 - 2bx^2 + (b^2 + ac - 4d)x + c^2 + a^2 d - abc.$$

Задача 4.
Существует ли расширение Галуа $\mathbb{Q}$ с группой Галуа $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, содержащее i?
Задача 5.

а) Для полинома $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ определим $g^*(x) = x^{\deg g} g(1/x)$. Пусть $g(0) \neq 0$, g и g^* взаимно просты и $g(x)$ приводим. Докажите, что существует $f \neq \pm g, \pm g^*$ такой, что $ff^* = gg^*$.

б) Пусть $n > 1$ и $f(x) = x^n - x - 1$. Докажите, что $f(x)$ и $f^*(x)$ взаимно просты.

в) Докажите, что многочлен $x^n - x - 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Задача 6.
Пусть n — натуральное число, $\zeta_n \in \mathbb{C}$ — примитивный корень n-ной степени из 1. Найдите $N_{K/\mathbb{Q}}(1 - \zeta_n)$, где $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$.
Задача 7. Вычислите группу Галуа полинома $f(x)$ над $\mathbb{Q}$, где

а) $f(x) = x^4 + 5x + 5$.

б) $f(x) = x^4 + 8x + 12$.

в) $f(x) = x^4 + 3x + 3$.

г) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 1$.