НМУ, Алгебра-2
Листок 7. 03.04.2023

Задача 1.
Вычислите группу Галуа многочлена $x^7 - x - 1$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 2.
Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, а L/K — конечное расширение. Докажите, что целое замыкание A в L целозамкнуто.

Задача 3.
Пусть $D \neq 1$ — целое число, свободное от квадратов (то есть если $d \in \mathbb{N}$ и $d^2 \mid D$, то $d = 1$). Опишите кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Задача 4.

а) Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ является кольцом главных идеалов.

б) Решите уравнение $x^2 + 2 = y^3$ в целых числах.

Задача 5.
Пусть p — простое число, $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$.

а) Вычислите $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\zeta_p^a)$.

б) Пусть $\mathcal{O}_p$ — кольцо целых поля K. Пусть $\lambda = 1 - \zeta_p$. Докажите равенство идеалов $(\lambda)^{p-1} = (p)$ и изоморфизм $\mathcal{O}_p/(\lambda) \simeq \mathbb{F}_p$

в)* Докажите, что для любого n и любого $x \in \mathcal{O}_p$ найдутся $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ такие, что $x - a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_n\lambda^n \in \lambda^{n+1}\mathcal{O}_p$.

г)* Докажите, что $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}[\zeta_p]$.

Задача 6.

а) Пусть $d > 0$ — натуральное число, не являющееся квадратом и число $x > 1$ — минимальное такое, что $|x^2 - dy^2| = 1$ для некоторого целого $y > 0$. Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^* = \{\pm 1\} \times (x + \sqrt{d}y)^{\mathbb{Z}}$.

б) Решите уравнения $x^2 - 5y^2 = 1$ и $x^2 - 13y^2 = 1$.

Задача 7.

а) Докажите, что всякая конечная $2-$группа имеет подгруппу индекса 2.

б) Пусть R — поле, не имеющее расширений нечётной степени. Докажите, что всякое расширение R имеет степень 2^n.

в) Пусть $C \supset R$ — квадратичное расширение, в котором всякий многочлен степени 2 имеет корень. Докажите, что C алгебраически замкнуто.