

Экспоненциальное отображение

Задача 1. Рассмотрим подгруппу в $GL(n, \mathbb{R})$ матриц с положительным определителем. Доказать, что это компонента связности единицы группы $GL(n, \mathbb{R})$.

Задача 2. Посчитать экспоненты e^A для

а) $A = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$;

б) A = жорданов блок размера n с собственным значением 0 ;

с) $A = t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

д) A = жорданов блок размера n с собственным значением λ .

Задача 3. а) Докажите, что для группы Ли $SL_2(\mathbb{R})$ экспоненциальное отображение не сюръективно.

б) Опишите его образ.

Задача 4. Докажите, что отображение $\exp: \mathfrak{g}(n, \mathbb{C}) \mapsto GL(n, \mathbb{C})$ сюръективно. Инъективно ли оно?

Задача 5. Рассмотрим вектор-столбец $x \in \mathbb{R}^3$ и построенную по нему матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x^t \\ x & 0 \end{pmatrix} \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4).$$

Выписать явную формулу e^{sX} (с применением гиперболических синуса и косинуса).

Задача 6. * Докажите, что если G – связная коммутативная группа Ли, то $\exp \mathfrak{g} = G$.

Задачи можно сдавать:

Каринэ Куюмжиян karina@mscme.ru по понедельникам с 19.20 до 20.50 в НМУ

Борис Билич - онлайн (договариваться через телеграм)

Илья Левин - онлайн (договариваться через телеграм)