Симплектическая группа

В данном листке фигурируют три группы: вещественная симплектическая группа $Sp(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^t J_n A = J_n\}$, комплексная группа $Sp(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{C}) \mid A^t J_n A = J_n\}$, являющаяся её комплексификацией, и максимальная компактная подгруппа второй группы $Sp(n) = \{A \in U(2n) \mid A^t J_n A = J_n\}$. Также в листке встречаются алгебры Ли первых двух из этих групп. (А чему изоморфна алгебра Ли третьей группы?)

Задача 1. [Теорема Вильямсона] Две матрицы $X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ переводятся друг в друга симплектическим преобразованием тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую жорданову структуру.

Задача 2. Жорданова структура любой матрицы из $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ удовлетворяет следующим ограничениям:

- если a – собственное значение, то $-a$ – тоже собственное значение,
- жордановы клетки, отвечающие собственным значениям a и $-a$, имеют одинаковую структуру,
- жордановых клеток нечётного размера с собственным значением $a = 0$ чётное количество.

Задача 3. Пусть $X \in \mathfrak{sp}(V)$. Тогда V распадается в прямую косоортогональную сумму симплектических подпространств, на каждом из которых оператор X имеет либо две жордановы клетки одинакового размера с противоположными собственными значениями, либо одну жорданову клетку чётного порядка с нулевым собственным значением.

Задача 4. Рассмотрим $X \in Sp(n, \mathbb{R})$. Докажите, что спектр X симметричен относительно единичной окружности и вещественной оси, а корневые подпространства, соответствующие симметричным собственным значениям, имеют одинаковую жорданову структуру.

Задача 5. a) Докажите, что для группы Ли $Sp(n, \mathbb{R})$ экспоненциальное отображение не сюръективно и не инъективно.

b) Опишите точки, в которых экспоненциальное отображение не является обратимым.

Задача 6. Докажите, что для любого элемента $g \in Sp(n, \mathbb{R})$ $\exists X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ $g = e^X e^Y$.

Задача 7. a) Покажите, что группа $Sp(1, \mathbb{R})$ диффеоморфна произведению открытого круга на окружность.

b) Покажите, что многообразие $Sp(n, \mathbb{R})$ диффеоморфно прямому произведению унитарной группы U_n и векторного пространства размерности $n(n + 1)$.

Задачи можно сдавать:
Каринэ Куюмжиян `karina@mccme.ru` по понедельникам с 19.20 до 20.50 в НМУ
Борис Билич - онлайн (договариваться через телеграм)
Илья Левин - онлайн (договариваться через телеграм)