Формула Дынкина

Задача 1. Выведите формулу Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа до порядка 4 из формулы Дынкина.

Задача 2. Выведите формулу Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа до порядка 5 из формулы Дынкина.

Задача 3. Рассмотрим трёхмерную комплексную алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

a) Докажите, что данные наборы матриц являются базисами этой алгебры Ли. Найдите коммутационные соотношения (т.е. коммутаторы базисных элементов).

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ .$$

b) Докажите, что у алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ есть (как минимум) две вещественные формы, одна из которых изоморфна $\mathfrak{su}(2)$, а другая – $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Компактны ли соответствующие группы Ли?

c*) Докажите, что у алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ есть ровно две вещественные формы.

Банаховы группы Ли и банаховы алгебры Ли

Определение. *Банаховой группой Ли называется бесконечномерная группа Ли, являющаяся банаховым многообразием и такая, что умножение и взятие обратного согласованы с банаховой структурой. Банахово многообразие – такое (бесконечномерное) топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству банахова пространства.*

Определение. *Банаховой алгеброй Ли называется банахово пространство $\mathfrak{g}$, на котором задана структура алгебры Ли так, что для некоторой константы C выполняется условие*

$$|[X,Y]| \leqslant C \cdot |X| \cdot |Y|.$$

Задача 4. Докажите, что касательная алгебра банаховой группы Ли является банаховой алгеброй Ли.

Задача 5. Пусть B – банахова алгебра. Докажите, что множество обратимых элементов B образует банахову группу Ли.

Задача 6. Докажите, что алгебра Ли линейных операторов в гильбертовом пространстве является банаховой.

Определение. *Для конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обозначим через $P(\mathfrak{g})$ пространство непрерывных путей в $\mathfrak{g}$ (с любыми началом и концом). В качестве нормы возьмём супремум на отрезке $[0,1]$ относительно любой фиксированной нормы на $\mathfrak{g}$ (на конечномерном $\mathfrak{g}$ все нормы эквивалентны).*

Для любого $\delta \in P(\mathfrak{g})$ построим $A_\delta \in C^1([0,1], Lin(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$ следующим образом: это будет решение A дифференциального уравнения

$$\frac{dA}{dt}(t) = \mathrm{ad}\delta(t) \circ A(t),\ A(0) = Id : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}.$$

Задача 7. * a) Докажите, что $P(\mathfrak{g})$ будет банаховой группой Ли, если умножение задать формулой

$$(\delta \cdot \delta')(t) = \delta(t) + A_\delta(t)\delta'(t),\ t \in [0,1].$$

b) Докажите, что касательной алгеброй этой группы Ли будет $P(\mathfrak{g})$, и выпишите формулу для коммутатора.

Задачи можно сдавать:
Каринэ Куюмжиян `karina@mccme.ru` по понедельникам с 19.20 до 20.50 в НМУ
Борис Билич - онлайн (договариваться через телеграм)
Илья Левин - онлайн (договариваться через телеграм)