Представления $\mathfrak{sl}_2$

Задача 1. С помощью теоремы Ли докажите существование старшего вектора (то есть вектора, аннулируемого X и собственного для H) в произвольном конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$.

Определение. *Обозначим через $V(m)$ неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$ размерности $m+1$. Его можно явно задать следующим образом. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_m$ – базис $V(m)$, положим*

$$X(v_0) = 0, \quad X(v_i) = i(m-i+1)v_{i-1} \text{ при } i \geqslant 1,$$

$$Y(v_i) = v_{i+1},$$
$$H(v_i) = (m-2i)v_i.$$

Задача 2. Рассмотрим вложение в качестве углового 2×2-блока $\mathfrak{sl}_2 \hookrightarrow \mathfrak{sl}_3$ и затем присоединённое действие $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathfrak{sl}_3$. Разложите его в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. (А для действия на $\mathfrak{sl}(4)$?)

Задача 3. Рассмотрим представление $V(m)$ для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ над полем конечной характеристики p (это представление задаётся формулами из Определения). Покажите, что оно неприводимо, пока старший вес m меньше p, но приводимо при $m = p$.

Задача 4. a) Разложите в сумму неприводимых подмодулей тензорное произведение представлений $\mathfrak{sl}_2$-модулей $V(3)$ и $V(7)$.

b) Тот же вопрос для $V(m) \otimes V(n)$ (ответ называется формулой Клебша-Гордана).

Задача 5. Для $\mathfrak{sl}_2$-модуля V рассмотрим также $\mathfrak{sl}_2$-модули S^2V, S^kV и Λ^2V соответственно симметрических и кососимметрических тензоров.

a) Если известны веса для V, найдите веса для S^2V, S^kV и Λ^2V.

b) Разложите на неприводимые представления $\Lambda^2V(2)$.

c) Разложите на неприводимые представления $S^kV(2)$.

d) Реализуйте явно действия X и Y в пространстве однородных многочленов от двух переменных степени k так, чтобы получилось представление $\mathfrak{sl}_2$.

Представления $\mathfrak{sl}_3$

Задача 6. Найдите разложение на неприводимые подмодули, веса и их кратности в $\mathfrak{sl}_3$-модуле S^2V, где V – тавтологическое представление $\mathfrak{sl}_3$, то есть представление в трёхмерном пространстве $\mathbb{C}^3$, $Z(v) = Zv$ для $Z \in \mathfrak{sl}_3, v \in \mathbb{C}^3$.

Задача 7. Найдите разложение на неприводимые подмодули, веса и их кратности в $\mathfrak{sl}_3$-модуле $S^4V \otimes V^*$, где V – тавтологическое представление, V^* – двойственное к тавтологическому.

Задачи можно сдавать:

Каринэ Куюмжиян `karina@mccme.ru` по понедельникам с 19.20 до 20.50 в НМУ

Борис Билич - онлайн (договариваться через телеграм)

Илья Левин - онлайн (договариваться через телеграм)