НМУ, I курс, 13.04.2023

Листок 4.

Задача 1. Пусть $\mathcal{A}$ состоит из множеств, которые являются объединением конечного числа дизъюнктных полуинтервалов $[a,b) \in [0,1)$. Докажите, что $\mathcal{A}$ является алгеброй, но не является сигма-алгеброй.

Задача 2. Пусть S – некоторый класс множеств в X. Пусть A_1 – пустое множество, множества из набора S и их дополнения. Через A_2 обозначим набор всех конечных пересечений множеств из A_1. Докажите, что набор A_3, состоящий из всех конечных объединений множеств из A_2, совпадает с алгеброй, порожденной набором S.

Задача 3. Докажите, что сигма-алгебра, порожденная набором из n множеств, содержит не более 2^{2^n} множеств, причем эта оценка точна.

Задача 4. Докажите, что если σ-алгебра бесконечна, то она несчетна.

Задача 5. Докажите, что борелевская сигма-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – наименьший класс подмножеств, замкнутый относительно счетных пересечений и счетных объединений и содержащий все замкнутые множества.

Задача 6. Докажите, что борелевская σ-алгебра плоскости не порождается (a) отрезками, (b) окружностями (c) полуплоскостями, образованными прямыми, которые параллельны некоторой данной прямой.

Задача 7. Докажите, что множество точек $x \in [0,1]$, в десятичной записи которых бесконечно много пятерок, является борелевским.

Задача 8. Приведите пример двух различных мер на сигма-алгебре, которые совпадают на некотором семействе множеств, порождающих эту сигма-алгебру.

Задача 9. На алгебре, состоящей из пустого множества, $\mathbb{R}$ и конечных объединений попарно непересекающихся полуинтервалов $[a,b)$ в $\mathbb{R}$ (допускаются бесконечные промежутки вида $(-\infty,b)$ и $[a,+\infty)$) задана мера μ формулой $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$, где F – монотонная ограниченная и непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что существует компактный класс, приближающий меру μ.

Задача 10. Найдите меру Лебега множества точек отрезка $[0,1]$ в десятичной записи которых не встречается 2023.

Задача 11. Докажите, что всякое открытое множество в $\mathbb{R}^d$ можно представить в виде объединения множества меры нуль и не более чем счетного набора попарно непересекающихся (a) замкнутых кубов, (b) замкнутых тетраэдров, (c) замкнутых шаров.

Задача 12. Пусть λ – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Докажите, что для всякого измеримого ограниченного множества E положительной меры Лебега и всякого числа $q \in (0,1)$ найдется такой отрезок J, что $\lambda(E \cap J) \geq q\lambda(J)$.

Задача 13. Пусть λ – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Докажите, что для всякого измеримого ограниченного множества E верно равенство: $\lim_{h\to 0} \lambda(E\Delta(E+h)) = 0$.

Задача 14. Пусть A – множество положительной меры Лебега на числовой прямой. Докажите, что множество $A - A$ содержит интервал.

Задача 15. Пусть E – множество положительной меры Лебега в $[0,1]$. Докажите, что для всякого $0 \leq \alpha < \lambda(E)$ существует компакт $K \subset E$ без внутренних и изолированных точек, для которого $\lambda(K) = \alpha$.