Листок 3. 1 марта 2023

Задача 1. Доказать, что если целая (голоморфная на всей прямой $\mathbb{C}$) функция f удовлетворяет при некотором $R > 0$ неравенству $|f(z)| \leq M|z|^n$ при всех $|z| > R$, то она является многочленом.

Задача 2. Любую ли непрерывную комплекснозначную функцию на окружности $\{z\bar{z} = 1\}$ можно равномерно приблизить многочленом?

Задача 3. Рассмотрим многочлен степени n со старшим коэффициентом равным единице. Докажите, что максимум его модуля по кругу радиуса 1 не меньше единицы. Когда он равен единице?

Задача 4. Верно ли, что функция tg ограничена вне ε-окрестности своих полюсов?

Задача 5. Доказать, что уравнение $\mathrm{tg} z = z$ имеет только вещественные решения.

Задача 6. Найти числа невещественных корней уравнений $\mathrm{tg} z = 1/2z$, $\mathrm{tg} z = z + 1$.

Задача 7. Доказать, что уравнение $\sin z = z$ имеет бесконечно много решений.