Листок 5. 17 мая 2023

Задача 1. Верно ли, что для движения плоскости g $g^*\Delta = \Delta g^*$? А для голоморфного отображения g?

Задача 2. Найти размерность пространства гармонических многочленов степени n на плоскости.

Задача 3. Рассмотрим полуплоскость, на границе которой лежит отрезок. В этой (открытой) полуплоскости рассмотрим угол, под которым виден этот отрезок. Гармонична ли эта функция?

Задача 4. Построить ограниченную гармоническую внутри открытого единичного диска функцию непрерывную на границе кроме двух точек так, что на одной полуокружности она равна нулю, а на другой единице.

Задача 5. Доказать, что ограниченная гармоническая функция в открытой верхней полуплоскости, обращающаяся в ноль на вещественной оси, непрерывная в замкнутой верхней полуплоскости, единственна. Существенно ли условие ограниченности?

Задача 6. Пусть функция f голоморфна. Верно ли, что $\Delta|f|^2 = 4|f'|$?

Задача 7. Пусть функция f голоморфна. Верно ли, что $\Delta ln(1+|f|^2) = 4|f'|/(1+|f'|^2)^2$?

Задача 8. Пусть функция f голоморфна в круге с центром в нуле, число $r > 0$ меньше радиуса этого круга. Верно ли, что

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|g(re^{i\varphi})|d\varphi?$$

Задача 9. Пусть функция f гармонична и положительна в круге с центром в нуле и радиусом R. Покажите, что при $|z| < R$ справедливо неравенство

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} \leq \frac{f(z)}{f(0)} \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}$$

Задача 10. Пусть для непрерывной в области функции справедлива теорема о среднем. Докажите, что эта функция гармоническая.