Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения"
к занятию 8 апреля 2023
Лемма Бореля-Кантелли.

Задания 9 и 10 из предыдущего листочка носят метрический характер и решаются с помощью леммы Бореля-Кантелли. Здесь мы собрали еще несколько подобных заданий. Ниже "почти все" употребляется в смысле меры Лебега.

1. Пусть q_ν - последовательность возрастающих натуральных чисел. Пусть для положительной функции $t \mapsto \psi(t)$ ряд $\sum_{\nu+1}^{\infty} \psi(\nu)$ сходится. Тогда для почти всех $\alpha \in [0,1]$ существует положительное $c(\alpha)$, такое что

$$||q_\nu \alpha|| > c(\alpha) \cdot \psi(\nu), \quad \forall \nu \geq 1.$$

2. Доказать, что если для положительной функции $t \mapsto \psi(t)$ ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{n-1}(\psi(q))^m$$

сходится, то для почти всех матриц

$$\Theta = \left(\begin{array}{ccc} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,m} \\ \theta_{2,1} & \cdots & \theta_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{n,1} & \cdots & \theta_{n,m} \end{array} \right)$$

неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} ||\theta_{j,1}x_1 + ... + \theta_{j,m}x_m|| < \psi\left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i|\right)$$

имеет лишь конечное число решений в целочисленных векторах $(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{Z}^m$.

3a. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ аффинное подпространство A. Известно, что существует

$$\Theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in A,$$

такой, что он является плохо приближаемым в смысле совместных приближений, то есть

$$\inf_{q \in \mathbb{Z}_+} \max_{1 \leq j \leq n} q^{1/n} \cdot ||q\theta_j|| > 0.$$

Доказать, что для почти всех $x = (x_1, ..., x_n) \in A$ для любого $\delta > 0$ выполняется

$$\inf_{q \in \mathbb{Z}_+} \max_{1 \leq j \leq n} q^{1/n+\delta} \cdot ||qx_j|| > 0.$$

3b. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное утверждению их пункта 3a, но в котором бы в качестве условия фигурировала бы сходимость некоторого ряда.

4a. Пусть $\psi(A, B)$ - первый угол между двумерными линейными подпространствами в $\mathbb{R}^4$ (он определялся на самом первом занятии). Доказать, что при $m = n = 2$ для почти всех 2×2 матриц Θ для подпространства

$$A_\Theta = \{z = (x; y) = (x_1, x_2; y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : \; y = \Theta x\}$$

для любого положительного δ при достаточно большом $t \geq t_0(\delta)$ выполняется

$$\min_{B:H(B)\leq t} \psi(A_\Theta, B) > t^{-4-\delta}$$

(здесь минимум берется по всем рациональным двумерным линейным подпространствам $B \subset \mathbb{R}^4$ высоты $H(B) \leq t$).
4b. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное утверждению их пункта 4a, но в котором бы в качестве условия фигурировала бы сходимость некоторого ряда.