Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения"
к занятию 11 февраля 2023

1. Медианта. Даны две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.
1) Доказать, что их *медианта* $\frac{a+c}{b+d}$ лежит между ними.
2) Доказать, что если $\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right|=\frac{1}{bd}$, то $\left|\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}\right|=\frac{1}{b(b+d)}$ и $\left|\frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}\right|=\frac{1}{(b+d)d}$.
2. Доказать, что если $\alpha\in\left[\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right]$ и $\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right|=\frac{1}{bd}$, то либо $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\le\frac{1}{2b^2}$, либо $\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|\le\frac{1}{2d^2}$.
3. Теорема Гурвица.
1) Доказать, что если $\alpha\in\left[\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right]$ и $\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right|=\frac{1}{bd}$, то либо $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\le\frac{1}{\sqrt{5}b^2}$, либо $\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|\le\frac{1}{\sqrt{5}d^2}$, либо $\left|\alpha-\frac{a+c}{b+d}\right|\le\frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2}$.
2) Для всякого иррационального числа $\alpha\in\mathbb{R}$ существует бесконечно много рациональных дробей $\frac{a}{q}$, таких что $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$.
4. Базис целочисленной решетки. Даны два вектора $e_1=(a,b),e_2=(c,d)\in\mathbb{Z}^2$, такие что $ad-bc=\pm1$.
1) Доказать что координаты каждого из векторов взаимно просты.
2) Доказать, что каждая целая точка $z\in\mathbb{Z}^2$ представима в виде $z=\lambda e_1+\mu e_2$ с целыми λ,μ.
4bis. Последовательности Штерна-Броко. Определим множества F_n, $n=0,1,2,\dots$. Для $n=0$ положим

$$F_0=\{0,1\}=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}.$$

Пусть определено множество F_n в виде

$$0=\xi_{0,n}<\xi_{1,n}<\dots<\xi_{N(n),n}=1, N(n)=2^n,\quad \xi_{j,n}=\frac{p_{j,n}}{q_{j,n}},\quad (p_{j,n},q_{j,n})=1.$$

Тогда F_{n+1} определяется как

$$F_{n+1}=F_n\cup Q_{n+1}$$

где

$$Q_{n+1}=\left\{\frac{p_{j,n}+p_{j+1,n}}{q_{j,n}+q_{j+1,n}},\quad j=0,\dots,N(n)-1\right\}.$$

a) Доказать, что всякое рационально число из отрезка $[0,1]$ принадлежит какому-то F_n.
b) Пусть для числа $\frac{p}{q}=\frac{p_{j,n}+p_{j+1,n}}{q_{j,n}+q_{j+1,n}}\in Q_{n+1}$ известно его разложение в цепную дробь

$$\frac{p}{q}=[0;a_1,...,a_{t-1},a_t],\quad a_t\ge2.$$

Как в цепные дроби раскладываются его "соседи" по F_{n+1}, то есть числа $\xi_{j,n}$ и $\xi_{j+1,n}$?
c) Теорема Лежандра. Пусть

$$\frac{p}{q}=\frac{p_{j,n}+p_{j+1,n}}{q_{j,n}+q_{j+1,n}}\in Q_{n+1},\quad \frac{p_-}{q_-}=\xi_{j,n}=\frac{p_{j,n}}{q_{j,n}},\quad \frac{p_+}{q_+}=\xi_{j+1,n}=\frac{p_{j+1,n}}{q_{j+1,n}}$$

(все дроби здесь несократимы). Рассмотрим отрезок $I=\left[\frac{p_-+p}{q_-+q},\frac{p+p_+}{q+q_+}\right]$. Доказать, что $\frac{p}{q}$ - подходящая дробь для α (в смысле разложения в цепную дробь) тогда и только тогда, когда $\alpha\in I$.

5. Дерево Фарея. 1) Медианта дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ есть $\frac{1}{2}$. Она разбивает отрезок $[0,1]$ на два отрезка с рациональными концами - отрезки $[0,\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2},1]$. Каждый из этих отрезков разобьем медиантами концов отрезка на два меньших отрезка. Получим 4 отрезка. Каждый из новых двух отрезков разобьем медиантами на два отрезка, и т.д. Доказать, что если этот процесс продолжить, то в качестве концов отрезков получатся все рациональные числа из отрезка $[0,1]$.
2) Что такое последовательности Штерна-Броко?
3) Что такое дерево Фарея?
6. Доказать точность теоремы Гурвица. Если $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, то для любого положительного ε неравенство $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{5}q^2}$ имеет лишь конечное число решений в рациональных числах $\frac{a}{q}$. (Указание: рассмотреть выражение $q^2 \cdot \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \cdot \left|\alpha - \frac{a}{q} - \sqrt{5}\right|$.)
7. Что представляют из себя множества

$$\{\alpha \in [0,1]: \ \alpha = [0; a_1, ..., a_t], \quad a_1 + ... + a_t = n\}, \quad \{\alpha \in [0,1]: \ \alpha = [0; a_1, ..., a_t], \quad a_1 + ... + a_t \leq n\},$$

(здесь $[0; a_1, ..., a_t]$ - разложение α в цепную дробь), и как они связаны с деревом Фарея?
8. Преобразование Фарея.
1) Рассмотрим отображение отрезка $[0,1]$ в себя, задаваемое формулой

$$T(x) = \begin{cases} x/(1-x), & 0 \leq x \leq 1/2, \\ (1-x)/x, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Что представляют из себя прообразы $T^{-n}(1)$ и $T^{-n}(0)$? Как они связаны с элементами дерева Фарея? Сколько в них элементов?
2) Посчитать сумму знаменателей всех чисел из $T^{-n}(0)$.