Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения"
к занятию 18 февраля 2023

Вокруг принципа Дирихле и теоремы Минковского о выпуклом теле.

Теорема Минковского о выпуклом теле. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ выпуклое 0-симметричное множество объема $\operatorname{vol}\Omega > 2^d$ то $\Omega \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \neq \varnothing$.
Замечания.
1) Выпуклое и ограниченное множество измеримо по Жордану.
2) Для замкнутого $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ условие на объем можно ослабить и потребовать $\operatorname{vol}\Omega \geq 2^d$.
3) Теорему можно сформулировать для произвольной решетки $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$ с невырожденной матрицей A.

1. **Routine beginning.** Пусть $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}, Q \in \mathbb{N}$. Доказать утверждения:
1) Существует $q \in \mathbb{N}$ такое что

$$\max_{1\leq j\leq n} ||q\alpha_j|| < 1/Q, \;\; q \leq Q^n.$$

2) Пусть хотя бы одно из чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$ иррационально. Тогда существует бесконечно много наборов рациональных чисел $(a_1/q, ..., a_n/q)$ удовлетворяющих неравенству

$$\max_{1\leq j\leq n} |\alpha_j - a_j/q| < 1/q^{1+\frac{1}{n}}.$$

3) Существуют целые числа $q_1, ..., q_n$, такие что

$$||q_1\alpha_1 + ... + q_n\alpha_n|| < Q^{-n}, \;\; 1 \leq \max_{1\leq j\leq n} |q_j| \leq Q.$$

4) Пусть числа $1, \alpha_1, ..., \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда существует бесконечно много примитивных векторов $(q_1, ..., q_n) \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих неравенству

$$||q_1\alpha_1 + ... + q_n\alpha_n|| < (\max_{1\leq j\leq n} |q_j|)^{-n}.$$

2. **Функции меры иррациональности.** Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
1) Рассмотрим функцию

$$\psi_{\alpha_1,\alpha_2}(t) = \min_{q\in\mathbb{N}:\, q\leq t} \max_{j=1,2} ||\alpha_j q||.$$

Доказать

$$\psi_{\alpha_1,\alpha_2}(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}, \;\; t \geq 1.$$

2) Закончить фразу: для функции

$$\psi^{[2]}_{\alpha_1,\alpha_2}(t) = \min_{q\in\mathbb{N}:\, q\leq t} \sqrt{||\alpha_1 q||^2 + ||\alpha_2 q_2||^2}.$$

выполнено

$$\psi^{[2]}_{\alpha_1,\alpha_2}(t) \leq ...., \;\; t \geq 1.$$

3) Закончить фразу: для функции

$$\psi^{*}_{\alpha_1,\alpha_2}(t) = \min_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2:\, 1\leq \max_{j=1,2}|q_j|\leq t} ||\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2||.$$

выполнено

$$\psi^*_{\alpha_1,\alpha_2}(t) \le ...., \quad t \ge 1.$$

3. **К совместным приближениям.** Пусть хотя бы одно из чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$ иррационально. Доказать, что существует бесконечно много целых точек $(q, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ удовлетворяющих неравенству

$$\max_{1\le j\le n} |q\alpha_j - a_j| < 1/(\mu_n q)^{\frac{1}{n}} \quad \text{где} \quad \mu_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

3. **Линейная форма и алгебраические числа.** Пусть числа 1 и $\alpha_1, ..., \alpha_n$ образуют базис вещественного алгебраического поля степени $n+1$. Доказать, что

$$\inf_{(m_1,...,m_n)\in\mathbb{Z}^n\setminus\{(0,...,0)\}} \left(||m_1\alpha_1 + ... + m_n\alpha_n|| \cdot \left(\max_{1\le j\le n} |m_j|\right)^n \right) > 0.$$

Указание а: воспользоваться теоремой о симметрических многочленах от сопряженных алгебраических чисел; кстати, наверное, проще будет еще и применить теорему о примитивном элементе. Указание б: разумно рассмотреть простейший случай $\alpha_j = \alpha^j$,

5. **К конструкции Хинчина, связанной с применением теоремы Дирихле для полиномиальных приближений.**
1) Теорема Хинчина. Для иррационального α существует бесконечно много целых q, таких что

$$||q^2\alpha|| \le \frac{10\log\log q}{\log q}.$$

Указание: доказывать надо неравенство

$$\min_{q\le Q} ||q^2\alpha|| \le \frac{10\log\log Q}{\log Q};$$

для этого много раз надо использовать результат пункта 1, 1) о том, что для натурального H выполнено

$$\min_{q\le H^k} \max_{1\le j\le k} ||q\alpha_j|| \le \frac{1}{H}.$$

2) Доказать, что для иррационального α для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\liminf_{q\to\infty} ||q^m\alpha|| = 0.$$

3) Получить явную оценку сверху для функции

$$\psi_{m,\alpha}(t) = \min_{q\le t} ||q^m\alpha||$$

6. **Угол между подпространствами.** Угол $\varphi(A,B)$ между двумя двумерными линейными подпространствами $A, B \subset \mathbb{R}^4$ определяется как минимальный угол между двумя ненулевыми векторами $a \in A, b \in B$. Подпространство B называется рациональным, если пересечение $B\cap\mathbb{Z}^4$ представляет из себя двумерную решетку. Высотой $H(B)$ рационального подпространства B называется фундаментальный (двумерный) объем решетки $B\cap\mathbb{Z}^4$. Рассмотрим функцию

$$\psi_B(t) = \min_{B-\text{рациональное}:H(B)\le t} H(B)\cdot\varphi(A,B).$$

Доказать, что с некоторой положительной постоянной C для любого A выполнено

$$\psi_A(t) \le \frac{C}{t^2}, \quad \forall t > 1.$$