Спецкурс Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения" к занятию 22 апреля 2023.

Приближения к числу и его квадрату и прочее

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618^+.$$

Теорема Давенпорта-Шмидта. *Для равномерного показателя* $\hat{\omega}(\boldsymbol{\xi})$ *для точки* $\boldsymbol{x} = (\xi, \xi^2) \in \mathbb{R}^2$, *когда* ξ *не являетсяквадратичной иррациональностью выполняется* $\hat{\omega}(\boldsymbol{x}) \leq \tau$.

Теорема Руа. *Существует число* $\xi \in \mathbb{R}$, *не являющееся квадратичной иррациональностью, и такое что* $\hat{\omega}(\boldsymbol{\xi}) = \tau$.

1. Упражнения к доказательству теоремы Давенпорта-Шмидта.

Пусть

$$\boldsymbol{z}_\nu = (x_{\nu,0}, x_{\nu,1} x_{\nu,2})$$

суть последовательные векторы наилучших совместных приближения для двумерной точки $\boldsymbol{x}$ и

$$L_\nu = \max(|x_{\nu,0}\xi - x_{\nu,1}|, |x_{\nu,0}\xi^2 - x_{\nu,2}|) = \psi_{\boldsymbol{\xi}}(x_{\nu,0})$$

соответствующие приближения.

a. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом ν выполнено

$$L_\nu < x_{\nu+1,0}^{-\hat{\omega}+\varepsilon}.$$

b. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом ν выполнено

$$|x_{\nu,1}\xi - x_{\nu,2}| < x_{\nu+1,0}^{-\hat{\omega}+\varepsilon}.$$

c. Доказать, что если $\hat{\omega} > \frac{1}{2}$, то для достаточно большого ν выполнено

$$\begin{vmatrix} x_{\nu,0} & x_{\nu,1} \\ x_{\nu,1} & x_{\nu,2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

d. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом ν выполнено

$$x_{\nu+1,0}^{\hat{\omega}-\varepsilon} < x_{\nu,0}.$$

e. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом ν выполнено

$$x_{\nu+1,0} > x_{\nu,0}^{\frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}-\varepsilon}.$$

Как теперь завершить доказательство теоремы Давенпорта-Шмидта?

2. Пусть иррациональная точка $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$. Доказать, что $\hat{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \leq \tau$.

3. Для $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ с условием

$$\xi_1^2 + ... + \xi_d^2 = 1$$

рассмотрим функцию меры иррациональности

$$\Psi_{\boldsymbol{\xi}}(T) = \min_{(q,a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{Z}^{d+1}:\ 1\le q\le T,\ a_1^2+..+a_d^2=q^2} \frac{(q\xi_1-a_1)^2+...+(q\xi_d-a_d)^2}{q}.$$

Доказать
a) $\forall\varepsilon>0\quad \overline{\lim}_{T\to\infty} T\Psi_{\boldsymbol{\xi}}(T) > \frac{1}{4}-\varepsilon$;
b) $\exists C_d>0:\ \sup_{T>1} T\Psi_{\boldsymbol{\xi}}(T) < C_d$.

Замечание. Для начала и для простоты можно считать, что $d=2$.

4. Упражнения к доказательству теоремы Руа. Рассмотрим число Фибоначчи

$$\xi = [0; a, b, a, a, b, a, ...],$$

которое получается из слова инвариантного относительно замены $a\mapsto ab, b\mapsto a$.
a. Доказать, что ξ не является квадратичной иррациональностью.
b. Теорема Руа следует из того факта, что существует последовательность совместных приближения $(x_{\nu,0}, x_{\nu,1}, x_{\nu_2})$ для (ξ,ξ^2), такая что

$$C_1 x_{\nu-1,0}^{\tau+1} \le x_{\nu,0} \le C_2 x_{\nu-1,0}^{\tau+1} \quad \max_{j=1,2} |x_{\nu,0}\xi^j - x_{\nu,j}| < C_3 x_{\nu,0}^{-1}, \quad C_j>0.$$

c. Рассмотрим слова w_i, образованные по правилу

$$w_0=b,\ w_1=a,\ \ w_i=w_{i-1}w_{i-2}.$$

Для слова w_{i+2} обозначим через m_i слово, получающееся из w_{i+2} удалением двух последних букв. Доказать, что слово m_i является палиндромом. Кроме того если положить $s_i=ab$ для четного i и $s_i=ba$ для нечетного i, то

$$m_1=a,\ m_2=aba,\ \ m_i=m_{i-1}s_{i-1}m_{i-2}.$$

d. В пределе слова w_j задают слово из определения числа ξ.
e. Рассмотрев матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

и воспользовавшись равенством

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_k & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k & q_{k-1}\\ p_k & p_{k-1}\end{pmatrix}$$

с $a_i\in\{a,b\}$ для слова m_ν найти матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{\nu,0} & x_{\nu,1}\\ x_{\nu,1} & x_{\nu,2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{k_\nu} & q_{k_\nu-1}\\ p_{k_\nu} & p_{k_\nu-1}\end{pmatrix}$$

из последовательных подходящих к ξ дробей. Отсюда получить неравенства

$$|x_{\nu,0}\xi - x_{\nu,1}| \le x_{\nu,0}^{-1},\ \ |x_{\nu,1}\xi - x_{\nu,1}| \le x_{\nu,1}^{-1}.$$

f. Доказать

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{x_{\nu,0}}{x_{\nu-2,0}x_{\nu-1,0}} = \xi^2+(a+b)\xi+(ab+1),$$

и для величины $t_\nu = x_{\nu,0} x_{\nu-1,0}^{-1-\tau}$ соотношения

$$t_\nu = \frac{x_{\nu,0}}{x_{\nu-2,0} x_{\nu-1,0}} t_{\nu-1}^{-1/(1+\tau)}, \ \ C_4 t_{\nu-1}^{-1/(1+\tau)} < t_\nu < C_5 t_{\nu-1}^{-1/(1+\tau)}.$$

Отсюда следует ограниченность t_ν сверху и снизу.

5. Доказать, что если $\xi \in \mathbb{Q}$ не является квадратичной иррациональностью, то для точки $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \xi^2, \xi^3)$ выполнено $\hat{\omega}_3(\xi) \leq 1/2$. Указание. Для векторов наилучших приближений $(x_{\nu,0}, x_{\nu,1}, x_{\nu,2}, x_{\nu,3}) \in \mathbb{Z}^4$ рассмотреть три укороченных вектора

$$(x_{\nu,0}, x_{\nu,1}, x_{\nu,2}), \ \ (x_{\nu,1}, x_{\nu,2}, x_{\nu,3}), \ \ (x_{\nu+1,0}, x_{\nu+1,1}, x_{\nu+1,2}) \in \mathbb{Z}^3.$$

Доказать что они линейно независимы и оценить определитель.

6. Доказать неулучшаемость неравенства из пункта 5.