Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения"
к занятию 25 февраля 2023

Функция меры иррациональность и диофантовы спектры.

A. О функции меры иррациональности.

Мы рассматриваем (обыкновенную) функцию меры иррациональности

$$\psi_\xi(t) = \min_{q \in \mathbb{Z}_+ : \, q \le t} ||q\xi||.$$

1. Доказать, что функция $\psi_\xi(t)$ кусочно постоянная.
2. Доказать неравенство $\psi_\xi(t) \le \frac{1}{t}$.
3. Доказать, что функция $\psi_\xi(t)$ имеет разрывы в точках $t = q_\nu$ и только в них.
4. Доказать, что для иррационального ξ множество таких t для которых $\psi_\xi(t) \ge \frac{1}{2t}$ неограничено.

Рассмотрим пределы

$$\lambda(\xi) = \underline{\lim}_{t\to\infty} t\psi_\xi(t),$$
$$d(\xi) = \overline{\lim}_{t\to\infty} t\psi_\xi(t),$$

5. Доказать, что для любого иррационального ξ выполнено $\lambda(\xi) \le 1/\sqrt{5}$.
6. Доказать $\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1/\sqrt{5}$.
7. Доказать, что для любого иррационального ξ выполнено $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \le d(\xi) \le 1$.
8. Доказать $d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$.
9. Для каких ξ выполнено $\lambda(\xi) = 0$?
10. Для каких ξ выполнено $d(\xi) = 1$?
Для иррациональных чисел $\alpha = [a_0; a_1, ..., a_m, ...], \beta = [b_0; b_1, ..., b_n, ...]$ будем писать $\alpha \sim \beta$б если их хиосты разложения в цепную дробь с какого то момента совпадают: $\exists m, n$: $a_{m+l} = b_{n+l} \forall l$.
11. Доказать, что если $\xi \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ то $\lambda(\xi) \le 1/\sqrt{8}$
12. Доказать, что если $\xi \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\xi \not\sim \sqrt{2}$ то $\lambda(\xi) \le 1/(\sqrt{221}/5)$. Для какого ξ выполнено $\lambda(\xi) = 1/(\sqrt{221}/5)$?
13. Закончить фразу: если $\xi \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ то $d(\xi) \ge ....$

B. О луче Холла.

1. Основной инструмент из цепных дробей. Если

$$\alpha = [0; a_1, ..., a_n, x], \quad \beta = [0; a_1, ..., a_n, y]$$

то

$$|\alpha - \beta| = \frac{|x - y|}{(xq_n + q_{n-1})(yq_n + q_{n-1})}.$$

2. Канторовы τ-множества. Из отрезка I выкидываются непересекающиеся интервалы Δ_j. Множество

$$K = I \setminus \left(\bigcup_j \Delta_j \right)$$

называется τ-множеством если .... (закончить формулировку).

3. Основной инструмент из канторовых множеств. Если K это 1-множество, то $K+K$ это весь отрезок $I+I$.

4. **Теорема Холла** $\exists\,\lambda^*>0:\quad [0,\lambda^*]\subset\mathbb{L}=\{\lambda:\ \exists\xi,\ \ \lambda=\lambda(\xi)\}$.

Для доказательства теоремы нужна

Основная Лемма. *Рассмотрим множества*

$$F_r=\{\alpha\in[0,1]\setminus\mathbb{Q};\ \alpha=[0;a_1,...,a_n,...]:\ \ a_j\le r\ \forall j\}.$$

Тогда F_4+F_4 есть отрезок

Для доказательства Основной Леммы надо убедится, что K_4 есть 1-множество.

5. a. Доказать, что существуют иррациональные числа, которые в система счисления с основанием 3 могут быть замписаны без цифры 1, а в системе счисления с основание 5 - без цифры 3.

b. Доказать, что найдется число α с разложением в цепную дробь $\alpha=[0;a_1,...,a_n,...]$, $\ a_j\le 4$, которое в системе счисления с основанием 3 может быть записано без цифры 1.

6. Доказать теорему Ньюхауза. Пусть $\tau_1\cdot\tau_2\ge 1$. Тогда τ_1-множество и τ_2-множество обязательно пересекаются при условии что одно не лежит в связной компоненте дополнения до другого.

7. Найти (желательно опитмально) параметр τ, для которого a. F_2 b. F_3 будут τ-множествами.

8. Доказать, что $F_3+F_3+F_3$ есть отрезок.

9. Сколько копий F_2 надо взять, чтобы $F_2+...+F_2$ было отрезком?

10. Доказать, что если множество K имеет структуру τ-множества, то из изначального отрезка I интервалы Δ_j можно выкидывать в порядке убывания длин, и при этом τ-структура сохранится.