Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения"
к занятиям 25 марта и 1 апреля 2023
Размерность пространств наилучших приближений.

Подпространства вида $\boldsymbol{y} = \Theta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, n+m=d$ в $\mathbb{R}^d$ обозначаем $\mathcal{L}_\Theta$. Везде ниже матрица Θ предполагается хорошей, то есть, считается, что последовательность наилучших приближений однозначно определена. $\boldsymbol{z}_\nu = (\boldsymbol{x}_\nu, \boldsymbol{y}_\nu) \in \mathbb{Z}^d$ - ν-тый вектор наилучшего приближения.

1. Доказать, что почти все (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{mn}$) $m \times n$ матрицы Θ задают вполне иррациональные подпространства $\mathcal{L}_\Theta$ в $\mathbb{R}^d$.
2. Пусть $m = n$. Доказать, что если найдется матрица Q с рациональными элементами, такая что $\det(\Theta - Q) = 0$, то подпространство $\mathcal{L}_\Theta$ не является вполне иррациональным. Верно ли обратное?
3. Доказать, что подпространства $\mathcal{L}_\Theta$, соотвествующие матрицам вида $\begin{pmatrix} \theta_1 & \xi\theta_1 \\ \theta_2 & \xi\theta_2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \xi\theta_1 \\ \theta_2 & \xi\theta_2 \\ \theta_3 & \xi\theta_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

и

$$\begin{pmatrix} \xi_1\theta_1 & \xi_2\theta_1 & \theta_1 \\ \xi_1\theta_2 & \xi_2\theta_2 & \theta_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

не является вполне иррациональными.
4. Доказать, что если $m > n$ то для величины

$$R(\Theta) = \min\{s: \ \forall \nu_0 \ \exists \nu_1, ..., \nu_s > \nu_0 \ \text{ такие что векторы } \boldsymbol{z}_{\nu_1}, ..., \boldsymbol{z}_{\nu_s} \text{линейно независимы}\}$$

выполнено $R(\Theta) \geq 3$.
5. Кроме величины $R(\Theta)$ рассмотрим величину

$$K(\Theta) = \dim \pi \cap \mathcal{L}_\Theta,$$

где π - то подпространство минимальной размерности из определения величины $R(\Theta)$ в котором, начиная с какого-то момента, лежат все наилучшие приближения. Доказать, что если $K(\Theta) = 1$ и $R(\Theta) > 2$ то $m < n$.
6. Доказать, что если $R(\Theta) \leq n + K(\Theta) - 1$, то элементы матрицы Θ связаны алгебраическим соотношением степени $\leq \min(m, R(\Theta) - K(\Theta) + 1)$.
7. Пусть $m = n = 2$. Доказать, что если $K(\Theta) = 1$, то $R(\Theta) = 2$.
8. Доказать, что при $m = n = 2$ для вполне иррациональной матрицы Θ выполнено $R(\Theta) = 4$.
9. Доказать, что при $m = 2, n = 3$ существуют матрицы вида (1), для которых $R(\Theta) = 2$ и у которых элементы линейно независимы над $\mathbb{Q}$ вместе с единицей.
10. Доказать, что при $m = 3, n = 2$ для любых ξ_1, ξ_2 и для почти всех (в смысле меры Лебега) наборов (θ_1, θ_2) для матрицы вида (2), выполнено $R(\Theta) = 3$.