Спецкурс "Задачи теории Диофантовых приближений"

06 мая 2023.

Фрихаль $n=1$

$$\begin{cases} \Theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \min\limits_{x \le t} \|x\alpha\| < x^{-1} \\ \exists \text{ б.м. } \frac{p}{q} : & \left|\Theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \end{cases}$$

ξ – алг. число $\quad H(\xi) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$

канонический многочлен

$$P_\xi(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (\text{мин. степени})$$

$$a_j \in \mathbb{Z} \qquad (a_0, \dots a_n) = 1$$

Гипотеза Вирзинга $\quad \Theta \in \mathbb{R}$ не алг. степени $\le n$

то $\exists$ б.м. $\xi \in \mathbb{A}$ $\deg \xi \le n$

$$|\Theta - \xi| \ll H(\xi)^{-n-1}$$

$n=1$ – доказано.

$n=2$ – доказали Давенпорт и Шмидт.

это я буду рассказывать

при произвольном n

Д.-Ш. : $H^{-\frac{n}{2}+\dots}$

Негвин

Боденин, Шлейшиц

$$H^{-\frac{n}{\sqrt{3}}+\dots}$$

Итак, мы будем сегодня.

$\boxed{L(x) = x_0 + x_1\theta_1 + x_2\theta_2}$ $1, \theta_1, \theta_2$ лин. нез. над $\mathbb{Z}$.

$x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$

$\hat{\omega} = \hat{\omega}(\theta_1, \theta_2)$ – равномерн. Диоф. экспонента

$\hat{\omega} \geq 2$ (Теор. Дирихле.)

$\omega = \omega(\theta_1, \theta_2)$ обыкновенные диофантовы экспоненты

$$\begin{matrix}\omega \\ \hat{\omega}\end{matrix} = \sup\{\gamma : \begin{matrix}\liminf \\ \limsup\end{matrix}\ t^{\gamma}\psi_\theta(t) < \infty\}$$

$\hat{\omega}_{\text{л.ф.}}$

$$= \sup\{\gamma : \begin{cases} |x| < t \\ |L(x)| < t^{-\gamma} \end{cases}$$ имеет решен

(ω) для ∞ мн-ва t

$(\hat{\omega})$ для всех. д.б. $t\}$

Приводим неравенств $\omega \geq \hat{\omega}$

Неравенство Ярника: $\omega \geq \hat{\omega}(\underbrace{\hat{\omega} - 1}_{\geq 1}) \geq \hat{\omega}$

Сегодня изучаем $\theta \in \mathbb{R}$

$\omega_* = \omega_*(\theta) = \sup\{\gamma : \exists$ б.м. $\xi \in A$ $\deg\xi \leq 2$ таких, что $|\theta - \xi| \leq H(\xi)^{-\gamma-1}\}$

и экспоненту ω_{LP}

Дать определен $\hat{\omega}_{LP}$

Пусть $L(x)$, $P(x)$ – две независимые линейные формы.

$\omega_{LP} = \sup\{\gamma : \exists\ \infty$ много $x \in \mathbb{Z}^3$: $|L(x)| \leq |P(x)| \cdot |x|^{-\gamma}\}$.

Теор $\omega_{LP} \geq \hat{\omega}^2 - \hat{\omega} + 1$ (*)

$\hat{\omega} \geq 2 \qquad \omega_{2p} \geq 3$

(*) "Очевидный факт"

$$\left.\begin{array}{l} L(x) = x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 \\ P(x) = x_1 + 2x_2\theta \end{array}\right\} \quad \omega_* \geq \omega_{2p} - 1$$

Следств. $\omega_* \geq \hat{\omega}(\hat{\omega} - 1)$

$\hat{\omega} \geq 2 \to \omega_* \geq 2$

$|\theta - \xi| \ll H(\xi)^{-3}$ имеет б. м. реш.

Неравенства переноса

Мы доказали оценку для $\underline{(\theta, \theta^2)}$

$\hat{\omega}$ совм. прибл.

$\overset{\shortparallel}{\hat{\omega}_{с.п.}}$

$\hat{\omega} = \hat{\omega}_{для\ лин.\ форм}$

$\parallel$

$\hat{\omega}_{л.ф.}$

$\frac{1}{2} \leq \hat{\omega}_{с.п.} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\qquad 2 \leq \hat{\omega}_{л.ф.} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Равенство Ярника (1938)

$$\hat{\omega}_{с.п.} + \frac{1}{\hat{\omega}_{л.ф.}} = 1$$

<u>Теор Руа.</u>

$\exists\, \underline{\theta}$: $\hat{\omega}_{с.п.} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$\hat{\omega}_{л.ф.} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Еще одна теорема Руа

$\to$ мн-во $\hat{\omega}_{с.п.}(\theta)$ всюду плотно не промежутке $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

Еще одна теорема

$\exists \theta$: $\omega(\theta) = 2 + \sqrt{5}$

Рус. $\exists \theta : \omega_* \ldots$

$$\omega_*(\theta) \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2+\sqrt{5}$$

Докажем „очевидный" факт.

ω_{LP}

$$x = (X, Y, Z).$$

$$L(x) = \theta^2 X + \theta Y + Z$$

$$P(x) = 2\theta X + Y$$

$$B(T) = XT^2 + YT + Z$$

$$|B(\theta)| \ll |x|^{-\omega_{LP}} |B'(\theta)|$$

$$\deg B(T) = 1 \text{ или } 2$$

$\omega_{LP} \geq$

Если $\deg B(T) = 1$ $\quad \exists \xi \in \mathbb{Q}$:

$$0 = B(\xi) = B(\theta) + (\theta - \xi) B'(\theta)$$

$$|\theta - \xi| = \left|\frac{B(\theta)}{B'(\theta)}\right| \ll |x|^{-\omega_{LP}}$$

$$\omega_* \geq \omega_{LP} - 1$$

Если $\deg B(T) = 2$

$$\exists \xi \in \mathbb{A} \quad \deg \xi = 2$$

$$B'' = 2X$$

$$0 = B(\xi) = B(\theta) + (\theta - \xi) B'(\theta) + \frac{1}{2}(\theta - \xi)^2 B''(\theta).$$

$\theta - \xi$ выберем корень +

$$|\theta - \xi| = \left|\frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 2BB''}}{B''}\right| \ll \left|\frac{B}{B'}\right| \ll |X|^{-\omega_{\ldots}}$$

?

Дискрим. $= B'^2 - 2BB'' > 0$ $|X| \geq H(\xi)$

$|X| = \max(X, Y, Z)$

$$|B| \leq |X|^{-3}|B'|$$

$$|B'| \gg X^3 B$$

$$|B'|^2 \gg X^6 |B|^2$$

$\xi \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 2BB''}}{B''}\right| =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{BB''}{|B'|^2}}}{|B''/B'|} \simeq 2\frac{BB''}{|B'|^2}\,\frac{|B'|}{B''} \ll \frac{B}{|B'|}$$

рекр дендели.

Доказываем теорему о двух линейных формах.

Берем послед. наилучших приближений для $L(x)$.

$(x_{0\nu}, x_{1\nu}, x_{2\nu}) = x_\nu$ $|x_\nu| = X_\nu$ $L_\nu = L(x_\nu)$

$X_1 < X_2 < \ldots$, $L_1 > L_2 > \ldots$

$$L_j < X_{\boxed{j+1}}^{-\alpha}$$

$2 < \alpha < \hat{\omega}$

предположим.

Сейчас предположение $\hat{\omega} > 2$

Упр адаптировать док-во для случая $\hat{\omega} = 2$

$1, \theta, \theta_2$ линейн. нез. над $\mathbb{Q}$

L, P — те формы, которые док.

$\Gamma(x)$ ... переписываются с $L(x), P(x)$

$F(x)$ — ... форм ...

Возьмем

$\max(|L(x)|, |P(x)|, |F(x)|) \asymp |x|$

$x = (x_0, x_1, x_2)$

$|x| = \max|x_i|$

$L = x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$

$P = x_0 + \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2$

$F = x_0 + \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2$

зависит от $\theta_j, \varphi_i, \phi_j$

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_2 \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 1 & \phi_1 & \phi_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$x_v \leftrightarrow L_v = L(x_v) \quad P_v = P(x_v) \quad F_v = F(x_v)$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} L_{j-1} & P_{j-1} & F_{j-1} \\ L_j & P_j & F_j \\ L_{j+1} & P_{j+1} & F_{j+1} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} x_{0j-1} & x_{1j-1} & x_{2j-1} \\ x_{0j} & x_{1j} & x_{2j} \\ x_{0j+1} & x_{1j+1} & x_{2j+1} \end{vmatrix}$$

Утв 1 $\Delta_j = L_{j-1} P_j F_{j+1} - \cancel{L_{j-1} P_{j+1} F_j} + \bar{\bar{o}}(1)$, $j \to \infty$.

$L_j X_{j+1}^2 \to 0$

$\hat{\omega} > 2$

Утв 2 Пусть x_{j-1}, x_j, x_{j+1} линейно зависимы, тогда $\exists t \in \mathbb{Z}$: $x_{j+1} = t x_j + x_{j-1}$

Упр: док утв. 2

Утв 3 $\exists$ б.м. j x_{j-1}, x_j, x_{j+1} лин. нез.

Утв 4 Пусть j велико и x_{j-1}, x_j, x_{j+1} независимы.

тогда (1) $X_{j+1} \gg X_j^{\alpha - 1}$

(2) $L_j \ll X_j^{-\alpha(\alpha-1)}$

$\boxed{2 < \alpha < \hat{\omega}}$

$\hat{\omega} \geq \hat{\omega}(\hat{\omega} - 1)$

Это ... очевидно

$X_j = |x_j|$

из теор. Эрмита про ... Обозн ...

$$X_{j+1} \gg X_j^{\alpha-1+}$$

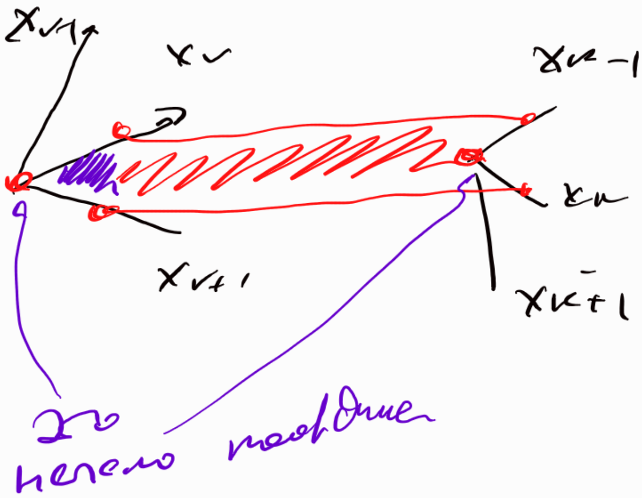
$$L_j \ll X_{j+1}^{-\alpha}$$

Паттерн:

(*) x_{v-1}, x_v, x_{v+1} — независимы

(**) x_{k-1}, x_k, x_{k+1} — независимы.

(***) x_j, $v \le j \le k$ — Все лежат в одной двумерной решетке



$$v \le j \le k-1$$

$$L_{j+1} = t_{j+1} L_j + L_{j-1}$$

$$P_{j+1} = t_{j+1} P_j + P_{j-1}$$

$$(\exists\, t_{j+1} \in \mathbb{Z})$$

$$L_v P_{v+1} - L_{v+1} P_v = \pm (L_{k-1} P_k - L_k P_{k+1})$$

Лемма Предположим, что

1) $0 < \Gamma < \alpha^2 - \alpha + 1 < \hat{\omega}^2 - \hat{\omega} + 1$

2) $|P_v| < L_v X_v^{\Gamma}$ (●)

и v — большое.

Тогда $|P_{v+1}| \gg X_v^{\alpha-1}$

Док-во

$$|L_{v-1} P_v F_{v+1}| \ll |L_{v-1} L_v X_v^{\Gamma}| X_{v+1} \ll$$

$$\ll X_\nu^{r-\alpha} X_{\nu+1}^{1-\alpha} \ll$$

$$\ll X_\nu^{r-\alpha^2+\alpha-1} = \bar{o}(1)$$

$1-\alpha<0$ по предп-ию $X_{\nu+1} \geq X_\nu^{\alpha}$.

По усл 1

$$1 \ll |L_{\nu-1} P_{\nu+1} F_\nu| < L_{\nu-1} X_\nu |P_{\nu+1}| \ll$$

$$\ll X_\nu^{1-\alpha} |P_{\nu+1}|.$$

Это то, что надо.

лемма док.

ПЕРЕРЫВ 15 МИНУТ

$L_\nu < X_{\nu+1}^{-\alpha}$

Основная Лемма.

$\beta_0 > 0$ $\quad 0<r<\alpha^2-\alpha+1$

Предполагаем $\exists$ сколь угодно большие ν с условиями:

$-\alpha(\alpha-1)$

β_0

(i) $L_\nu \gg X_\nu^{-\Gamma}$ $\quad L_\nu \ll X_\nu$

$\beta_0 > \alpha(\alpha-1)$

(ii) одновременно:

- $|P_\nu| \leq L_\nu X_\nu^{\Gamma}$
- $|P_{k-1}| \leq L_{k-1} X_{k-1}^{\Gamma}$
- $|P_k| \leq L_k X_k^{\Gamma}$

Тогда

(A) $\Gamma \geq \alpha^2 + 1 - \frac{\beta_0}{\alpha - 1}$

(B) $L_k \gg X_k^{-\beta'}$ $\quad \beta' = \Gamma - \alpha - 1 + \frac{\beta_0}{\alpha-1} < \beta_0$

Док-во.

$X_{\nu+2} \geq X_{\nu+1}$

$$L_{\nu+1}|P_\nu| \leq L_\nu L_{\nu+1} X_\nu^{\Gamma} \ll$$

$$\ll L_\nu X_{\nu+2}^{-\alpha} X_\nu^{\Gamma} \leq L_\nu X_{\nu+1}^{-\alpha} X_\nu^{\Gamma} \ll$$

$$\leq L_\nu X_\nu^{\Gamma - \alpha(\alpha-1)} = \bar{o}\left(L_\nu X_\nu^{\alpha-1}\right)$$

Утверждали ли

$$L_\nu |P_{\nu+1}| \gg L_\nu X_\nu^{\alpha-1}$$

$$r < \alpha^2 - \alpha + 1 \qquad 1 < \alpha - 1 \qquad \boxed{2 < \alpha}$$

L_v

$$\gg X_v^{-\beta_0 + \alpha - 1}$$

$$L_v X_v^{\alpha-1} \ll L_{k-1}|P_k| + L_k|P_{k-1}|$$

$$L_v P_{v+1} - L_{v+1} P_v = \pm (L_{k-1} P_k - L_k P_{k-1})$$

$$L_v X_v^{\alpha-1} \ll c$$

$$\max(L_{k-1}|P_k|, L_k|P_{k-1}|) \le L_{k-1} L_k X_k^{r} \ll$$

$$\ll X_k^{r-\alpha} X_{k+1}^{-\alpha} \ll X_k^{r-\alpha^2} \ll$$

$$\boxed{\text{Sluchae: } X_{k+1} \gg X_k^{\alpha-1}} \qquad \le X_{v+1}^{r-\alpha^3} \ll$$

$k \ge v+1$

$$\ll X_v^{(r-\alpha^2)(\alpha-1)}$$

Итак:

$$-\beta_0 + \alpha - 1 \qquad (r-\alpha^2)(\alpha-1)$$

$$X_{\nu}^{\ldots} \ll X_{\nu}^{\ldots}$$

$$L_{\nu} \gg X_{\nu}^{-\beta_0 1}$$

$$\boxed{\text{Выб}: \quad \Gamma \geq \alpha^2 + 1 - \frac{\beta_0}{\alpha - 1}}$$

(A) Доказано.

Доказываем (B):

$$X_{\nu}^{\alpha-1-\beta_0} \leq L_{\nu} X_{\nu}^{\alpha-1} \ll L_{k-1} L_k X_k^{\Gamma} \ll$$

$$\ll L_k X_k^{\Gamma-\alpha}$$

$$L_k \gg X_k^{\alpha-\Gamma} \quad X_{\nu}^{\alpha-1-\beta_0}$$

$$\beta_0 > \alpha(\alpha-1) > \alpha - 1$$

$$X_k \geq X_{\nu+1} \gg X_{\nu}^{\alpha-1}$$

$$L_k \gg X_k^{\alpha-\Gamma+\frac{\alpha-1-\beta_0}{\alpha-1}}$$

$$\boxed{\beta' = r - \alpha - 1 + \frac{\beta_0}{\alpha - 1} < \beta_0}$$

Лемма доказана

Докажем теорему.

Определение:

$$\beta_{i+1} = r - \alpha - 1 + \frac{\beta_i}{\alpha - 1}$$

$$\beta_i \le \alpha(\alpha-1) + \frac{\beta_0}{(\alpha-1)^i} \to \alpha(\alpha-1)$$

$$\boxed{r \ge \alpha^2 + 1 - \frac{\beta_0}{\alpha - 1}}$$

$$\beta_{i+1} \le r - \alpha - 1 + \frac{\alpha(\alpha-1) + \frac{\beta_0}{(\alpha-1)^i}}{\alpha - 1}$$

$$r - 1 + \frac{\beta_0}{(\alpha-1)^{i+1}}$$

$r \le \alpha^2 - \alpha + 1$

$$r - 1 \le \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha-1)$$

Предположим

$$L_j \le |P_j| \, X_j^{-r} \quad \forall j$$

$\forall \varepsilon \; \exists j_0 \; \forall i \ge j_0$

$$\beta_j \le \alpha(\alpha-1) + \varepsilon$$

$$r \ge \alpha^2 + 1 - \frac{\beta_0}{\alpha-1} \quad \beta_0 \le \beta_j \quad \alpha(\alpha-1)$$

В пол. на β_0 берем

$$r \ge \alpha^2 + 1 - \alpha \quad \text{противоречие}$$

Доказано.

$$\boxed{r < \alpha^2 - \alpha + 1}$$

Ea $L_i > p_i X_i^{-r} >$

$$p_i X_i^{-\alpha^2+\alpha-1}$$