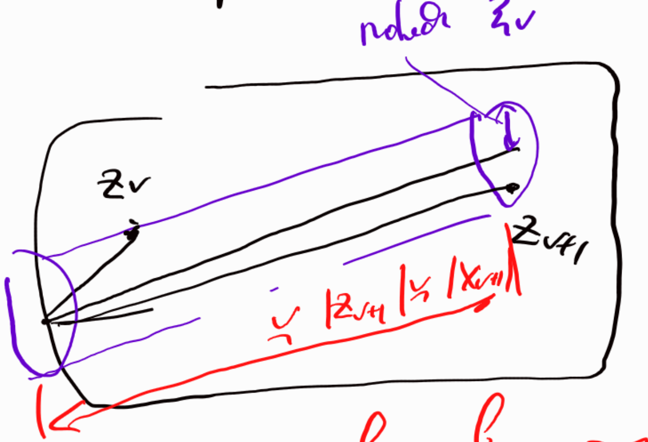
08 апреля 2023

с/к Задачи теории Диофантовых приближений

С прошлого раза



$\mathcal{R} \supset \ell$ - одномерное

$\langle z_v, z_{v+1} \rangle_{\mathcal{R}} = \pi$

двумерное подпр-во.

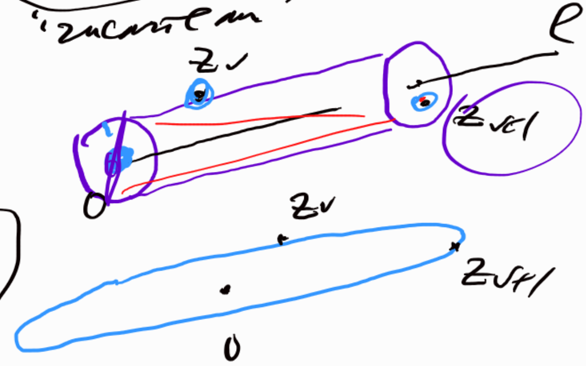
z_{v+1} - не хорошо цилиндре. z_v не боковой грани

Измерение цилиндра

$z_v = (x_v ; y_v) =$
$= (\underbrace{x_{1v} \ldots x_{mv}}_{\text{"знаменатели"}} ; \underbrace{y_{1v} \ldots y_{nv}}_{\text{"числители"}})$

$\xi_v = \|\Theta x_v\|$

сечение цилиндра плоскостью π



Объём цилиндра $\asymp |z_{v+1}| \xi_v^{r-1}$

для $R = r$

площадь сечения $\asymp |z_{v+1}| \xi_v$

в первом области

Утверждение $m, n \geq 2$, $n \leq m$. | Можно считать что $m \geq 3$

Тогда существует вполне иррациональная матрица Θ $m \times n$ такая что

$$R(\Theta) = n+2$$

Док-во.

Три ингредиента.

1. теорема Ярника о сингулярных матрицах.
2. лемма Бореля-Кантелли.
3. Экспоненциальный рост наилучших приближений.

1. Теорема Ярника.

Рассм вспомогательный случай $\boxed{m^* = 2}$, n – произв.

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} \theta^*_{11} & \theta^*_{12} \\ \theta^*_{21} & \theta^*_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \theta^*_{n1} & \theta^*_{n2} \end{pmatrix}$$

пусть вполне ирр.

$R(\Theta^*) \geq n+2 = n+m^*$

? здесь равенство.

рассм векторы наил. прибл. для матрицы Θ^*

$$z^*_\nu = (x_\nu ; y_\nu) = (x_{1\nu}, x_{2\nu}; y_{1\nu} \dots y_{n\nu}) \in \mathbb{Z}^{n+2}$$

Т. Ярника $m^* = 2$ $\quad \forall\, \varphi(t) \downarrow 0 \quad \exists\, \Theta^*$ с алгебр. независимыми элементами

такие что

$$\psi_{\Theta^*}(t) < \varphi(t) \quad \forall t \geq t_0$$

Всегда $\psi_{\Theta^*}(t) \leq t^{-\frac{2}{n}}$

$$\psi_{\Theta^*}(t) = \min_{\substack{x \in \mathbb{Z}^2 \\ 0 < |x| \leq t}} \|\Theta x\|$$

Мы будем применять теор Ярника с $\varphi(t) = t^{-\gamma}$

$$\frac{2}{n} < \frac{m}{n} < \gamma$$

$$m \geq 3 > m^* = 2$$

Мы будем рассматривать матрицы

$$\frac{2}{\quad} \qquad \Theta^{*} \quad [2] \qquad \Theta^{(2)} \quad \begin{pmatrix} \theta_{13} & \dots & \theta_{1m} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\Theta = \left(\underbrace{\Theta}_{n} \;\Big|\; \underbrace{\Theta}_{m-2} \right) \qquad \Theta = \begin{pmatrix} \dots & \\ \theta_{n3} & \theta_{nm} \end{pmatrix}$$

размерность $\boxed{N = (m-2)\times n}$ в $\mathbb{R}^{(m-2)\times n}$

Теор. Если $\gamma > \frac{m}{n}$, то для почти всех $\Theta^{[2]}$

$\exists \nu_0 \ \forall \nu \geq \nu_0$ н.п. для Θ послед. $\nu \geq \nu_0$

$(*)$ $z_\nu = (x_{1\nu}, x_{2\nu}, \underbrace{\theta \dots \theta}_{m-2}, y_{1\nu} \dots y_{n\nu})$

будет состоять из последовательных н.п. для Θ

$t \geq |x_{\nu_0}|$ $\qquad \psi_{\Theta^*}(t) = \psi_\Theta(t)$ V

Замечание $\hat{\omega}(\Theta) = \hat{\omega}(\Theta^*)$.

Можно получить что можно обяснен $\hat{\omega} = \gamma$

и даже $\hat{\omega} = \frac{m}{n}$

Тривиальное нер-во $\hat{\omega}(\Theta) \leq \omega(\Theta)$.

Шлейшиц. Пусть $r = R(\Theta) < d$ тогда

$$\omega(\Theta) \geq \frac{m}{n} \cdot G(m, n, r),$$

где $G(m, n, r) > 1$.

при $\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$ точное значен $G(m, n, r)$ известно

Если $m, n \geq 2$ значе $G(m, n, r)$ неизвестно.

Гип. $G(m, n, r) = \min \frac{\omega(\Theta)}{\hat{\omega}(\Theta)}$

$\xi_\nu = \psi_{\Theta^*}(x_\nu)$

Лемма Пусть ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_{\nu+1}|^m \xi_\nu^n$ сходится.

Тогда для п.в. $\Theta^{[2]}$ н.п.

для Θ отличаются от z_ν

не более чем на конечное

число.

Почему ряд сходится: у нее $\psi_{\Theta^*}(t) < t^{-\gamma}$, $m-\gamma n$

$\xi_v < |X_{v+1}|^{-\gamma}$

$$\sum_v |X_{v+1}|^m \xi_v^n \ll \sum |X_{v+1}|$$

$\gamma > \frac{m}{n}$

$$\sum |X_v|^{-\delta} \quad \delta > 0$$

сходится.

т.к. $|X_v| > c^v$, $c > 1$

экспоненциальный рост.

Мы расширяем матрицу Θ^*. Могут появиться новые целочисленные приближения $(x;y) = (x_1, \dots, x_m; y_1 \dots y_n)$

$x = (x_1 \dots x_m) \longmapsto \underline{X} = (x_3, \dots x_m)$.

Опасные целые точки когда $\underline{X} \neq 0$

Новые приближения могут появиться т.к.

$$0 \neq |\underline{X}| \leq |X| \leq |X_{v+1}|$$

это все опасные значения

ξ_v

$|X_{v+1}|$

Будем считать $|\Theta_{i,j}| \leq 1$

$3 \leq i \leq m$

$1 \leq j \leq n$

Θ^* - у нее фиксировано. Мы изучаем меру множеств состоящих из $\Theta^{[2]}$

условие X

условие y_j

$$|\Theta^*_{j,1} x_1 + \Theta^*_{j,2} x_2 - y_j| \leq (m-2)|\underline{X}| + 1 \leq m|\underline{X}|$$

Хотим, чтобы для опасных целочисл. векторов

$$\|\Theta x\| = \|\Theta x - y\| > \xi_v$$

$\xi_v \leq 1$

$|x_v| \quad |X_{v+1}|$

$$|\Theta^*_{j1} x_1 + \Theta^*_{j2} x_2 + \Theta_{j3} x_3 + \dots + \Theta_{jm} x_m - y_j| < \xi_v$$

$|\underline{X}|$

Нер. Вейля мн. во $W_?$.

$$\Omega_{j\nu}(x, y_j) = \{(\theta_{j,3},\dots,\theta_{j,m}) \in [0,1]^{m-2} : |\theta_{j,3}x_3 + \dots + \theta_{j,m}x_m + \theta^*_{j1}x_1 + \theta^*_{j2}x_2 - y_j| < \xi_\nu\}.$$

$$\Omega_\nu(x,y) = \Omega_{1\nu}(x,y_1)\times\dots\times\Omega_{n\nu}(x,y_n) \in [0,1]^N$$

$$W_\nu = \bigcup_x \bigcup_y \Omega_\nu(x,y).$$

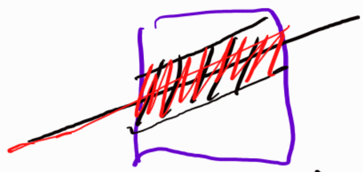
При фикс x, y как оценить меры $\Omega_\nu(x,y)$.

$$\mu(\Omega_\nu(x,y)) \ll_{m,n} \left(\frac{\xi_\nu}{|X|}\right)^n$$

x_ν $x_{\nu+1}$

$X \neq 0$

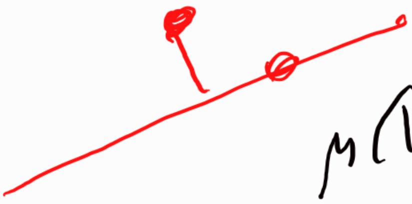
$$\frac{(\theta_3 \dots \theta_m) \in [0,1]^{m-2} : |\theta_3x_3+\dots+\theta_m x_m - \lambda| < \xi_\nu}{(\theta_3 \dots \theta_m)} \quad \Omega_j$$



$$\frac{\xi}{|X|}$$

$$\theta_3x_3+\dots+\theta_m x_m - \lambda = 0$$

$$|w_3x_3+\dots w_m x_m - \lambda| < \xi,$$



$$\mu(W_\nu) \ll \sum_x \sum_y \left(\frac{\xi_\nu}{|X|}\right)^n =$$

$$= \xi_\nu^n \sum_x \frac{1}{|X|^n} \sum_y 1 \ll$$

$\ll |X|$

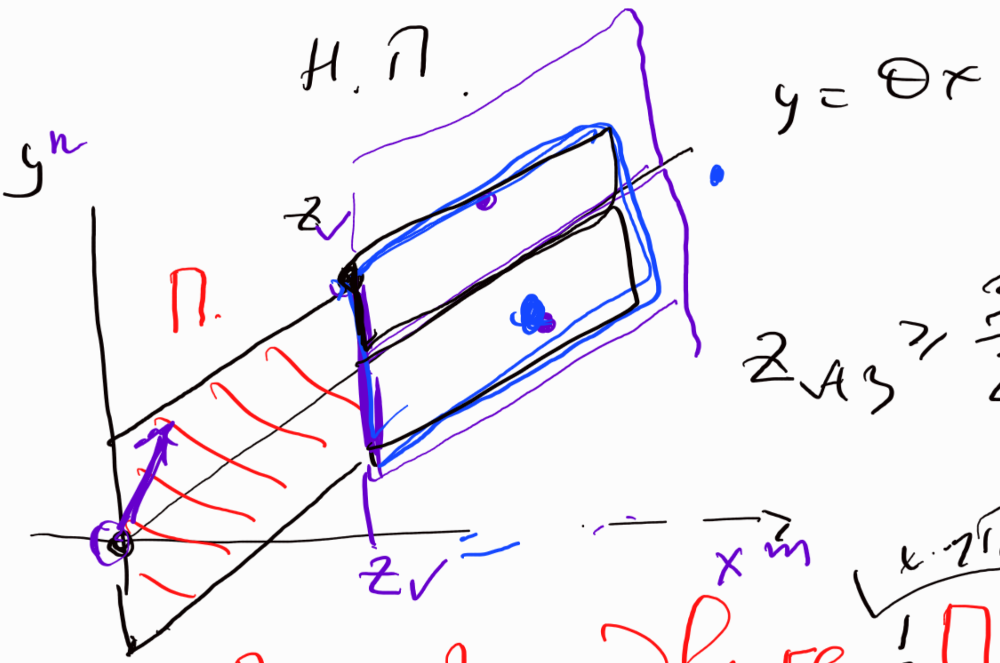
$$\ll \xi_\nu^{m} \sum_x 1 \ll \xi_\nu^{m} |x_{\nu+1}|^{m}$$

$$\sum \xi_\nu^{m} |x_{\nu+1}|^{m} < \infty.$$

Это.

$$\mu\Big(\bigcap_{\nu_0} \bigcup_{\nu \geq \nu_0} W_\nu\Big) = 0$$

OS экспоненциальном росте



$z_{\nu+3} \geq \frac{3}{2} z_\nu$

$x \in 2П$

Лемма В любом сдвиге $\frac{1}{2}П + \zeta$ не более одной целой точки

$m = n = 1$

$m + n = d$

$m = n = 1$

$|z_1| > \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

сдвиг $\frac{1}{2}\Pi + \xi$

$\exists\ z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$

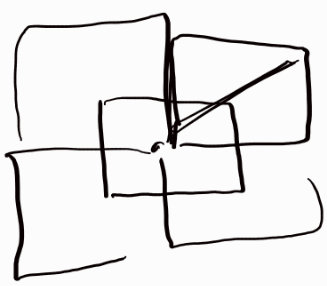
$z_1, z_2 \in \frac{1}{2}\Pi + \xi$

$\Downarrow$

$z_1 - z_2$ — внутри Π —

— противоречие

Отсюда экспоненциальный рост.



$$\xi \in \frac{1}{2}\Pi$$

$$\eta \in \frac{1}{2}\Pi.$$

$$\xi - \eta \in \frac{1}{2}\Pi + \frac{1}{2}\Pi = \Pi.$$