11 февраля 2023

Спецкурс "Задачи теории диофантовых приближений"

Лекция № 1

"Вместо введения"

• Теор Гурвица $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\exists\ \infty$ много $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$$

Последовательность Штерне – Броко

индуктивное определение последовательностей F_n, которые и называются послед-ть Ш-Б.

$F_0 = \{0 = \frac{0}{1},\ 1 = \frac{1}{1}\}$

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

$\frac{1}{2}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Процедура взятия медианты $\frac{a}{b}\ \ \frac{c}{d} \to \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

медианта рациональных дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$

$Q_1 = \{\frac{1}{2}\}$

$F_1 = F_0 \cup Q_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$F_n = \{\xi_{n,0} = 0,\ \xi_{n,1},\ \ \xi_{nj} = \frac{p_{nj}}{q_{nj}},\ \xi_{nj+1} = \frac{p_{nj+1}}{q_{nj+1}}, \dots, \xi_{nN}\}$

n-тая последовательность Штерна-Броко

Упражнение 1 $N_n = 2^n + 1$ — Докажем.

$$Q_{n+1} = \left\{ \xi_{nj} \oplus \xi_{n,j+1} = \frac{p_{nj} + p_{n\,j+1}}{q_{nj} + q_{n\,j+1}} \right\}$$

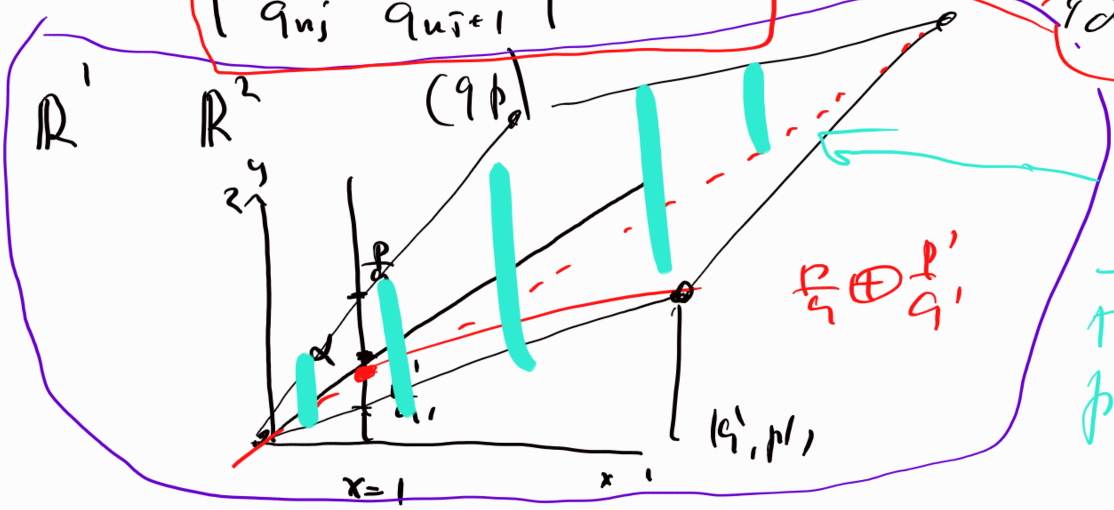
$$F_{n+1} = F_n \cup Q_{n+1} = \{ \xi_{n+1,0}, \dots \quad \xi_{n+1, N_{n+1}} \}$$

$$\frac{p_{nj}}{q_{nj}} < \frac{p_{n\,j+1}}{q_{n\,j+1}}$$

$\circ \times \circ \times \circ \lambda \circ \times \circ$

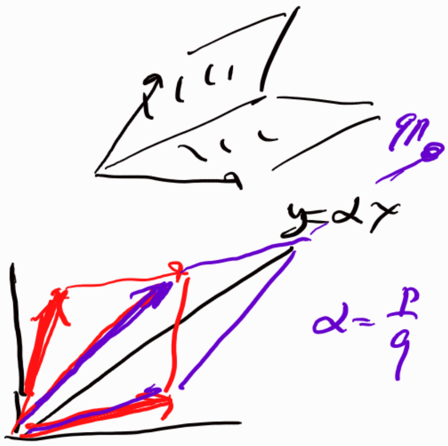
д-в по индукции — $\boxed{\begin{vmatrix} p_{nj} & p_{n\,j+1} \\ q_{nj} & q_{n\,j+1} \end{vmatrix} = -1}$

Упражнение 2 Докажем



площадь зеленой перемычки равна 1.

$\frac{p}{q} \Big| \frac{p'}{q'}$



$\left[\frac{p}{q} \quad \frac{p'}{q'}\right]$

$\left[\frac{p}{q} \quad \frac{p+p'}{q+q'}\right) \left[\frac{p+p'}{q+q'} \quad \frac{p'}{q'}\right]$ $\qquad \frac{p+p'}{q+q'}$

Упр 3 - Докажем

$\boxed{! \quad \forall \xi \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \quad \exists\ n, j \quad \xi = \xi_{nj}}$

Вообще Если $\xi = \xi_{n,j}$ то

$$\xi = \xi_{n+1, \boxed{2j}} = \xi_{n+2, 4j} = \dots$$

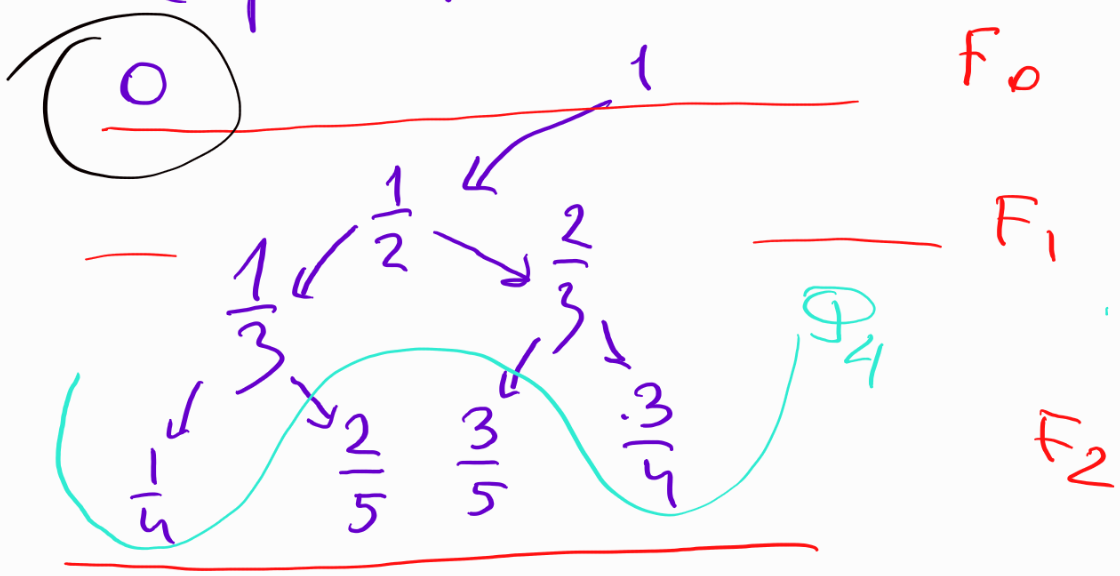
F_n $\overbrace{\circ \times \circ \times \circ}^{j}$ ξ_{nj}

$$= \xi_{n+k, 2^k j}$$

Указание. использовав двумерную картинку.

Лирическое отступление:

Штерн-Броко ~~~ Фарей.



ряд Фарея $\longrightarrow$ $\Phi_Q = \left\{ \frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \quad q \le Q \right\} = \{ r_{Q0} < r_{Q1} \dots < r_{Q,\Phi_Q} \}$

$|\Phi_Q| = \Phi_Q + 1$

кол-во элементов $\Phi_Q + 1$

$$\Phi_Q = \sum_{q \le Q} \varphi(q)$$

$$\boxed{\Phi_1 = 2}$$

Возвращение к док-ву теоремы Гурвица.

Лемма пусть $\alpha \in \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] \setminus \mathbb{Q}$

пусть $\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \frac{1}{bd}$.

Тогда либо $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^2}$, (1)

либо $\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, d^2}$, (2)

либо $\left|\alpha - \frac{a+c}{b+d}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,(b+d)^2}$ (3)

лемма $\Rightarrow$ Теор Гурвица

Пусть (1) и (2) не выполнено: пусть бу огр. общности $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

$\frac{a}{b}$ α $\frac{c}{d}$

$\geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$ $\geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}$

$$\frac{1}{bd} = \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2} + \frac{1}{\sqrt{5}d^2} \quad \times \sqrt{5}b^2$$

$$\frac{b}{d} = \xi \in \mathbb{Q}$$

$$\boxed{\sqrt{5}\,\xi \geq 1 + \xi^2} \Rightarrow \xi \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$\boxed{1/\xi \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$

α $\frac{a+c}{b+d}$

$\frac{a}{b}$ $\frac{c'}{d'}$ $\frac{c}{d}$

не огр общности пусть $\alpha \in \left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right)$

и пусть (1) и (3) неверны

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}\right| = \frac{1}{b(b+d)}$$

$c' = a+c$

$d' = b+d$

$\left(\frac{a}{b}, \frac{c'}{d'}\right)$ $\frac{1}{bd'}$

$$\eta = \frac{b+d}{b} \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$\eta = 1 + \frac{d}{b} = 1 + \frac{1}{\xi}$$

$$\eta, \frac{1}{\xi} \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

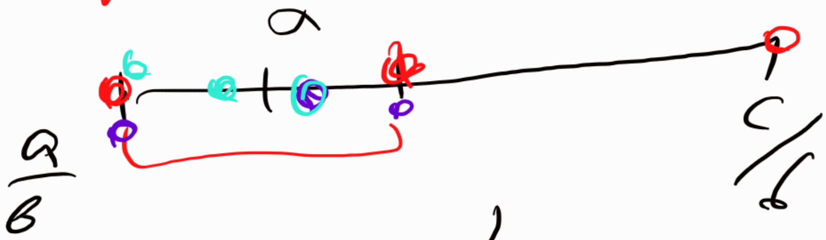
противоречие.

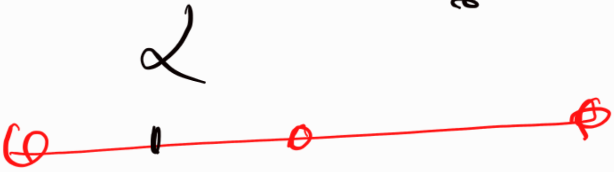
Не может быть одновременно неверны (1), (2), (3).

Лемма доказана

Лемма … (top line cut off)

Теор следует из леммы.

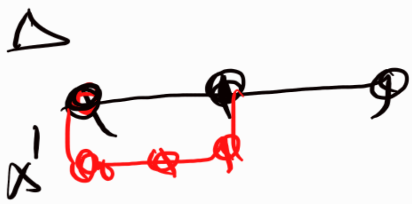




$$\Delta = \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$$

$$\Delta' = \begin{cases} \left[\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right] & \text{или} \\ \left[\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right] \end{cases}$$

$$\Delta' \subset \Delta$$



Т.к. $\alpha \notin \mathbb{Q}$ то получим бесконечно много приближений!

Теорема Гурвица Эрмита.

Связь:

moshchevitin@gmail.com