11 марта 2023

спецкурс "Задачи теории диофантовых приближений"

Дискретная часть спектра Дирихле.

$$2+\sqrt{5} = \underline{W} \qquad \beta_0 = [\overline{1}]$$

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2 \ldots] \qquad \beta_n = [\overline{\underbrace{1\ 1}_{2n-1}\ 2}]$$

$$\alpha \longmapsto W_n(\alpha) = \underline{\alpha_{n+1}} / \underline{\alpha_n^*}$$

$$\alpha_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3} \ldots]$$

$$\alpha_n^* = [0; a_n, a_{n-1} \ldots a_1]$$

$$W(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} W_n(\alpha)$$

Теор Morimoto – Lesca

Если $W(\alpha) < \underline{W}$ то $\exists n$ $\alpha \sim \beta_n$

Док-во: 1° $\exists$ б.м. n $a_n \geqslant 3$

$$a_n\ \boxed{a_{n+1}}\ a_{n+2}$$

$$\frac{1}{\alpha_n^*} = [a_n; a_{n-1} \ldots]$$

$\geqslant 3,\ \geqslant 2$

Если $a_{n+1} \geqslant 2$ $W_n > a_{n+1} a_n \geqslant 6$

$a_{n+2} \geqslant 2$ то же самое

$$1\ \overset{1,3}{a_{n+1}}\ 1$$

в этом случае

$$[3; 1 \ldots] \cdot [1; \ldots] > \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{4} > 2+\sqrt{5}$$

$$[3; 1 \ldots] \geqslant [3; 2] = \frac{7}{2}$$

$$[1; \ldots] \geqslant [1; 4] = \frac{5}{4}$$

Если доп. известно все неп. дроби (с конечного места) $\leqslant 4$

не разобраны случ.

$\exists$ б.м. n $a_n \geqslant 5$ этот случай ясен.

Надо отметить когда $\exists$ но $\forall$? но

$\in \{1, 2\}$

$a_i \in \{1, 2\}$.

2°. Если $\exists$ б.м. $a_n a_{n+1} = 22$

в 2, 2 а

$$W_n = [2; \ldots][2; \ldots] \geq 5$$

$$[2;3][2;3]$$

$$2 + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{c_{n+1}}}$$

Остался случай, когда удвоение двойки окружены 1.

$$2 \; \underbrace{1 \ldots 1}_{r} \; 2 \; \underbrace{1 \; 1}_{s} \; 2 \ldots =$$

$$= 2\, 1_r\, 2\, 1_s\, 2 \ldots$$

3° $\exists$ ∞ много r, s разной чётности.

$\alpha(x) = [a_0; a_1, a_2, a_3 \quad a_{k+1}, \underset{k}{x}]$ $\alpha(x)$ $\left\{ \begin{array}{ll} \uparrow & k \text{ чётно} \\ \downarrow & k \text{ нечётно.} \end{array} \right.$

дробно-лин. ф-ция от x

$1_r \, \overset{\frown}{2} \, 1_s$ r и s разной чётности

r - чётное

s - нечет

$$W_n = [\underset{=}{\overset{0}{2}}; \overset{s+1}{1_s 2}; \ldots][\overset{0}{1_r}, 2 \ldots] \geq$$

$> [2; \overline{1}] \cdot [\overline{1}]$ ↑ не с. там места

$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = W = 2 + \sqrt{5}$ точка накопления в спектре

Пусть нечётное

$\alpha = [a_0; a_1 \ldots a_t \; x \; a_{t+1} \ldots] \notin \mathbb{Q}$

$\beta = [a_0; a_1 \; a_t \; y \; a_{t+1} \ldots] \notin \mathbb{Q}$

$x > y \iff \alpha > \beta$ ← использовали это

4° "Мучительный" $\alpha = [\ldots 2\, 1_{r_i}\, 2\, 1_{r_{i+1}}\, 2\, 1_{r_{i+2}} \ldots]$

Все r_i - одинаковой чётности.

4.1° все r_i четные | A) Все r_i равны кол с некот. р

4.2° Все r_i нечётны | Б)

Это много различных r_i ... мест

Все случаи кроме $\boxed{4.1°\ А)}$ сейчас исключим.

Лемма $\boxed{1)}$ Если r чётно, то
$$[2; 1_{r+2}, 3] \cdot [1_r, 2, 2] > W$$
2) Если r нечётно, то
$$[2: 1_r, 2, 2]\ [1_{r+2}, 3] > W$$

$\boxed{\text{Лемма} \Rightarrow \text{Теор}}$

можно здесь разрезать

i

Если $\alpha = [\dots 2, 1_r, \boxed{2}, 1_s, 2 \dots]$

$r+s$ чётные ; пусть $r > s$

$$W_i = [2; 1_r, \underset{\text{нет}}{2} \dots] \cdot [1_s, 2, \underset{\text{нет}}{1} \dots] \geq$$
$$\geq [2; 1_r, 3] \cdot \underline{[1_s, 2, 2]} \geq$$

$s < r$

$s \leq r-2$

$$\geq [2; 1_r, 3] \cdot [1_{r-2}, 2, 2] > W$$

По лемме.

s α

$[1\ 1\ 2\ 2\ .]$

$[1\ 1\ 1\ 1\ \ ]$

Упр Доделать случай нечётных r.

Если все r чётные и с какого-то места совпадают.

чёт

$$\alpha(r) = [\overline{1_r, 2}]$$

$$W(\alpha) = [2\ \overline{1_r}] \cdot [\overline{1_r, 2}] =$$

$W(\alpha) =$

это уже было $\quad = \alpha\left(2+\frac{1}{\alpha}\right) = 2\alpha+1$

ЧЯ $\quad \alpha(r) \searrow_{r} \quad W = 2+\sqrt{5}$

$\alpha(r+2) \qquad \alpha_{r+1} < \alpha_r$

Упр. Верно ли, что мы докажем существование несчётного семейства чисел α, таких что $W(\alpha) = 2+\sqrt{5}$?

Теперь доказываем лемму.

Доказываем пункт 1) r — чётно.

Если r чётно, то

$$[2; 1_{r+2}, 3]\cdot[1_r, 2, 2] > W$$

$$\boxed{u_n(x) = [2; 1_{2(n+1)}, x] = \frac{F_{2n+5}x + F_{2n+4}}{F_{2n+3}x + F_{2n+2}}}$$

$$[2; 1_{2n}] = 2 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} = \frac{2F_{2n+1}+F_{2n}}{F_{2n+1}} = \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+1}}$$

$F_0=0,\ F_1=1 \qquad [0;1,1] = \frac{F_2}{F_3} \qquad [0,1] = \frac{F_1}{F_2}$

$$[2;1_{2(n+1)}] = \frac{F_{2n+5}}{F_{2n+3}} \qquad \frac{F_{2n+4}}{F_{2n+2}}$$

$$v_n(y) = [1_{2n}, y] = \frac{F_{2n+1}y + F_{2n}}{F_{2n}y + F_{2n-1}}$$

$\boxed{\text{Лемма } u_n(3)\cdot v_n([2;2]) > W}$

Лемма в лемме

$$n \longmapsto u_n(3)\, v_n([2,2]) = f_n$$

убывает

$$u_n(x)v_n(y) = \frac{F_{2n+5}x + F_{2n+4}}{F_{2n+3}x + F_{2n+2}} \cdot \frac{F_{2n+1}y + F_{2n}}{F_{2n}y + F_{2n-1}}$$

$n \to \infty$ $\quad f_n \longrightarrow [2\bar{1}]\cdot[\bar{1}] = W$

положит

доказываем непосредственным счетом.

$u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n$

Дальше не досчитывать!

Возникает

$F_a F_b - F_c F_d$

$F_a F_{a+3} - F_{a+1} F_{a+2}$ $\leftarrow$ знак этого легко определить

О других спектрах

"Второе приближение"

A $\quad u_n^{[2]}(1) \quad \min |q\alpha - p|$

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1\le q\le t} \{ |q\alpha \ldots$$

«первая вторая функция»

$$\boxed{(p\,q) \ne (p_n q_n)\ \forall n} \qquad \frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$$

$$\mathbb{L}_2 = \{\lambda : \exists \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : \lambda = k_2(\alpha) = \liminf_{t\to\infty} t\,\psi^{[2]}_\alpha(t)\}$$

<u>Теор</u>. 1) $\max \mathbb{L}_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ $\qquad [1] \qquad [\overline{113}]$

2) второе $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

3) $\left[0; \frac{12}{21+\sqrt{15}}\right] \subset \mathbb{L}_2$

П. Семенюк. Theтe мало $\in \mathbb{L}_2$

$$[1\,\overline{\underset{A}{113}\ \underset{B}{11113}}]$$

$$\overline{A^k B} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(B)

Вторая вторая функция

$$\boxed{\psi^{[2]*}_\alpha(t) = \min_{q\le t} |q\alpha - p|}$$

$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$

$\mathbb{L}_2^*$ — спек $\{ \underbrace{\liminf t\, \psi_\alpha^{[2]*}(t)}_{k_2^*(\alpha)} \}$

Теор

1) мах $\mathbb{L}_2' = \sqrt{5} = k_2^*\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

2) Ес. $\alpha \not\sim \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ то $k_2^*(\alpha) \leq \frac{3}{2}$

3) $\frac{3}{2} = k_2^*(e)$ 1ая точка накопления в $\mathbb{L}_2^*$

4) $\min \mathbb{L}_2^* = \frac{1}{2}$

5) $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \mathbb{L}_2^*$