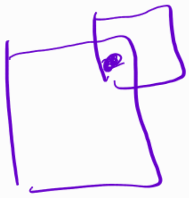
13 мая 2023

С/к Задачи теории диофантовых приближений

Хорошо распределённые последовательности и метрические теоремы.

Опр $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0;1)^n$ 

$\xi = (\xi_{1k}, \dots, \xi_{nk})$.

Последовательность хорошо распределена если $\exists C>0$ $\exists \infty$ много $q \in \mathbb{N}$:

$\forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in [0,1)^n$

Если рассмотрев

$$B_{C,q}(\eta) = \left[\eta_1, \eta_1 + \frac{C}{q^{1/n}}\right) \times \dots \times \left[\eta_n, \eta_n + \frac{C}{q^{1/n}}\right)$$

$B_{C,q}(\eta) \subset [0,1)^n$ требование

$\exists\, k \le q$ такое что $\xi_k \in B_{C,q}(\eta)$

Бересневич: хор расп это что-то типа local ubiquity

Пример Чебышёв. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\{\dots\}^{\infty} \subset [0,1)$

$\xi_k = \{\alpha k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$

хор. распр:

$q: \ |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$, то $\forall \beta \ \exists k \le q$

$\|k\alpha - \beta\| \le \frac{3}{q}$

$6/q$

$\forall \alpha \ \forall \beta$
$\exists$ б.м. q $\|q\alpha - \beta\| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q}$ Хинчин

Хинчин.

$\psi_\alpha(t) = \min_{q \le t} \max_j \|q\alpha_j\|$

$\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ наз. регулярным (non-singular)

Если $\limsup_{t \to \infty} t^{1/n} \psi_\alpha(t) > 0$

Теор. α - регулярно $\Leftrightarrow$ $\exists \delta$ $\exists$ беск. много q:
$\forall \eta \in \mathbb{R}^n \ \exists k: \ k \le q$
и $\max_{1 \le j \le n} \|k\alpha_j - \eta_j\| < \frac{\delta}{q^{1/n}}$

о расстояниях Кловерблад см. статью в "История мат. исследований"

чебышёвские св-ва

Теор Хинчина α сингл. для совм. прибл. $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ α сингл. как линейн. форма

След. $(\{\alpha_1 k\} \dots \{\alpha_n k\})_{k=1}^{\infty}$ для регулярного α хорошо распределена

Теор 1 Если ξ_n хорошо распределена, то для п.в. $\eta \in [0,1)^n$ выполнено $\liminf k^{1/n} \max \|\xi_k - \eta_j\| = 0$

это будет Если мн. ву $\eta \in$ мн. меньшей размерности

$\lim\inf_{k\to\infty} \dots \max_{1\le j\le n} \|\xi_{j,k} \dots\|$

Д-во: $\psi_\nu \in [0,1]$ $\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu^{n} = \infty$ $\quad \mu(\cdot)$ – мера Лебега.

$[0,1)^n$ покроем боксами

$$B_{c,q}(y_{i_1 \dots i_n})$$

$$y_{i_1 \dots i_n} = \left(\frac{i_1 c}{q^{1/n}}, \dots \frac{i_n c}{q^{1/n}}\right)$$

$$0 \le i_1 \dots i_n \le \left\lceil \frac{q^{1/n}}{c} \right\rceil^n$$

их столько штук

по крайней мере $W' = \left(\left\lceil \frac{q^{1/n}}{c} \right\rceil - 1\right)^n$

$\exists$

$B_{c,q}(y_i) \ni \xi_k$ по опр. хор. распр.

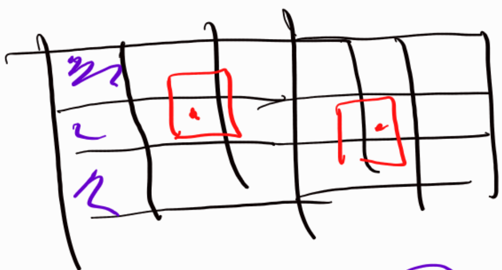
$\psi \in [0,1]$

$$I_\ell = \left[\xi_{1,k_\ell} - \frac{c\psi}{q^{1/n}}, \xi_{1k_\ell} + \frac{c\psi}{q^{1/n}}\right] \times \dots \times$$

$k_\ell \le q$

$\bar{i} = (i_1 .. i_n)$ по всем координатам

$B_{cq}(\bar{i})$ – берём только те, для которых $i_1 \equiv i_2 \equiv \dots \equiv i_n \pmod 3$



$I_\ell \cap I_{\ell'} = \varnothing$

если $\ell \ne \ell'$

Пусть теперь I_e — отрезок q' шт.)к.

тогда $q' \preceq_c q \qquad q' \le q$

По одному q из опр. хор. распределения строим компанию боксов.

Индуктивный процесс.

Пусть $q_1 \dots q_\nu$ из определения хор. расп.

Всего I: $q_1' \dots q_\nu'$ — кол-ва из семейств боксов.

$q_\nu' \preceq_c q_\nu$

Семейство боксов уровня ν

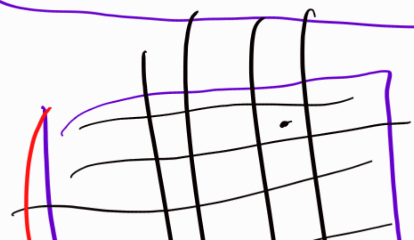
$I_\ell(\lambda) \qquad 1 \le \ell \le q_\nu'$

<u>Утверждение</u> $\forall \varepsilon > 0$ можно взять $q = q_{\nu+1}$ (при достаточно большом $\nu+1$)

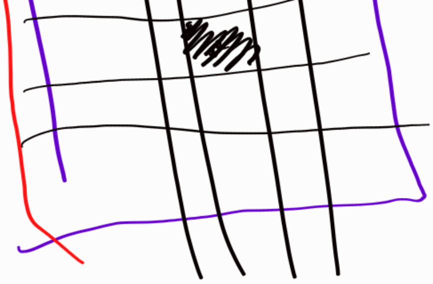
$\forall \lambda \le \nu \ \forall \ell$

$$\#\{r : 1 \le r \le q'_{\nu+1} \ \ \underline{I_\ell(\lambda)} \cap I_r(\nu+1) \ne \emptyset\} \le$$

$$\le (1+\varepsilon)\, \mu\, I_\ell(\lambda)\, q'_{\nu+1}$$



$I_\ell(\lambda)$



объедин $\quad E_\nu = \bigcup_{\ell=1}^{q_\nu'} I_\ell(\nu)$

Считаем

$$\mu(E_\nu) \gg \left(\frac{2c\psi_\nu}{q^{1/n}}\right)^n q_\nu' \gg_C \psi_\nu^n$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(E_\nu) = \infty \qquad \bigcup I_r(\nu)$$

хотим оценить сверху $\mu(E_\lambda \cap E_\nu)$ $\lambda < \nu$

Оцен $\quad \mu(I_\ell(\lambda)\cap E_\nu) = \mu(\underline{I_\ell(\lambda)) \cap E_\nu})$

$E_\lambda = \bigcup_\ell I_\ell(\lambda)$

$\mu I_r(\nu) \times$ кол-во

$$\le (1+\varepsilon)\mu I_\ell(\lambda)\, \underbrace{q_\lambda' \cdot \mu \frac{I_r(\nu)}{r}}_{\le \mu E_\nu}$$

$$\le (1+\varepsilon)\mu I_\ell(\lambda)\, \mu E_\nu$$

суммируем по ℓ

$$\mu(E_\lambda \cap E_\nu) \le (1+\varepsilon)\mu E_\lambda$$

$\mu(E_\lambda \cap E_\nu) = \ldots \cdot \mu E_\nu$

Оценка леммы Метрич. теории Диоф. прибл. из кн. Спринджука 1985 г.

$$E = \{ y : \exists \text{ б.м. } \nu : y \in E_\nu \}$$

$$\mu E \geq \limsup_{t \to \infty} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{t} \mu E_\nu \right)^2}{\sum_{\lambda,\nu=1}^{t} \mu(E_\lambda \cap E_\nu)} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$\forall \varepsilon$

$\mu E = 1$ теор. док.

ПЕРЕРЫВ

Пример тощей меры в задаче о векторе не сингулярном.

... Пусть вект. $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$

1. Пусть ... ξ_1, ξ_2

обладают св-вом:

1) $\psi_\xi(t) \le \frac{1}{t^3} \quad \forall t \geq 1$

$$\psi_\xi(t) = \min_{\substack{(q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \le |q| \le t}} \|q_1 \xi_1 + q_2 \xi_2\|$$

$\xi \in \mathbb{R}^2$ сингулярен, т.к. критический показатель $= 2$

2) $\limsup_{t \to \infty} t^3 \psi_\xi(t) = c > 0$

Задача: Докажите, что $\exists \xi \in \mathbb{R}^2$ удовл. 1) и 2)

Теор2 Если $\xi \in \mathbb{R}^2$ удовлетв. 1) и 2)

то $\exists (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 \; \exists \xi_3 \in \mathbb{R}$:

- (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — не сингулярен
- $\forall \eta_3 \in \mathbb{R}$

$\inf \; ^{1/3} \max(\|q_1 \xi_1 ... \|, \|q_1\xi_1 - y_1\|, \|q\xi - y_2'\|$ ...

$$q \in \mathbb{Z}_+ \quad q \ \max\left(\|q\xi_1 - \eta_1\|, \|q\xi_2 - \eta_2\|, \|q\xi_3 - \eta_3\|\right)$$

> 0

$\ell = \{ x_1 = \eta_1, \ x_2 = \eta_2, \ x_3 - \text{любое} \} \in \mathbb{R}^3$

нет ли $\eta \in \ell$

$$\inf q^{1/2} \max |q\xi_i - \eta_i| = 0$$

Теор 2 Есть следующие 2 утверждения:

Теор 3 Хинчин – Ярник (1941)

Если $\xi \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет 1)

то $\exists \ \eta_1, \eta_2$:

$$\inf_q q^{1/3} \max\left(\|q\xi_1 - \eta_1\|, \|q\xi_2 - \eta_2\|\right) > 0$$

Теор 4 Если $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$

удовл 2) то $\exists \ \xi_3$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) – не сингулярн-

Dom tập 2.

$$\max(a, b, c) \geq \max(a, b)$$