18 марта 2023

с/к Задачи теории диофантовых приближений

Комментарии к прошлому ряду

Начало док-ва теоремы про спектр Дирихе

$W = 2+\sqrt{5}$

$$w_n(\alpha) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^*}$$

Нужно было разобрать с теми α для котор

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, w_n(\alpha) \le 2+\sqrt{5} = W$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha \sim \beta_n$$

$$\beta_n = [\overline{2\, \underbrace{1 \ldots 1}_{2n-1}}]$$

Повторим самый первый случай

$\exists\ \infty$ много n: $a_n \geq 3$.

а) $a_n \geq 5$

б) все $a_n < 5$ (начиная с какого-то n.)

$\exists$ б. м. n $a_n = 4$

и ... $a_{n+1} = 4$

$$\alpha_{n+1} \geq [4; \overline{5}] \ \overline{41} \geq 4 + \frac{1}{5}$$

$$(\alpha_n^*)^{-1} \geq [1, \overline{41}] \geq 1 + \frac{1}{5}$$

$$\xi = [0, \overline{41}] = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^*} \geq (4+\xi)(1+\xi) \geq \underline{2+\sqrt{5}}$$

это так?

в) Все $a_n \leq 3$ для д. б. и

и $\exists a_n = 3$.

$$\alpha_{n+1} \geq [\underline{3}; \overline{31}]$$

в1) Если a_{n+2} и $a_n \geq \underline{2}$.

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^*} \geq 6 \text{ или } \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}^*} \geq 6$$

в2) обе $a_{n+2} = a_n = 1$

$$\alpha_{n+1} \geq [3; 1, \overline{13}] \approx 3{,}55$$

$$(\alpha_n^*)^{-1} \geq \underline{[1, \overline{31}]} = [\overline{1,3}] = 1{,}26$$

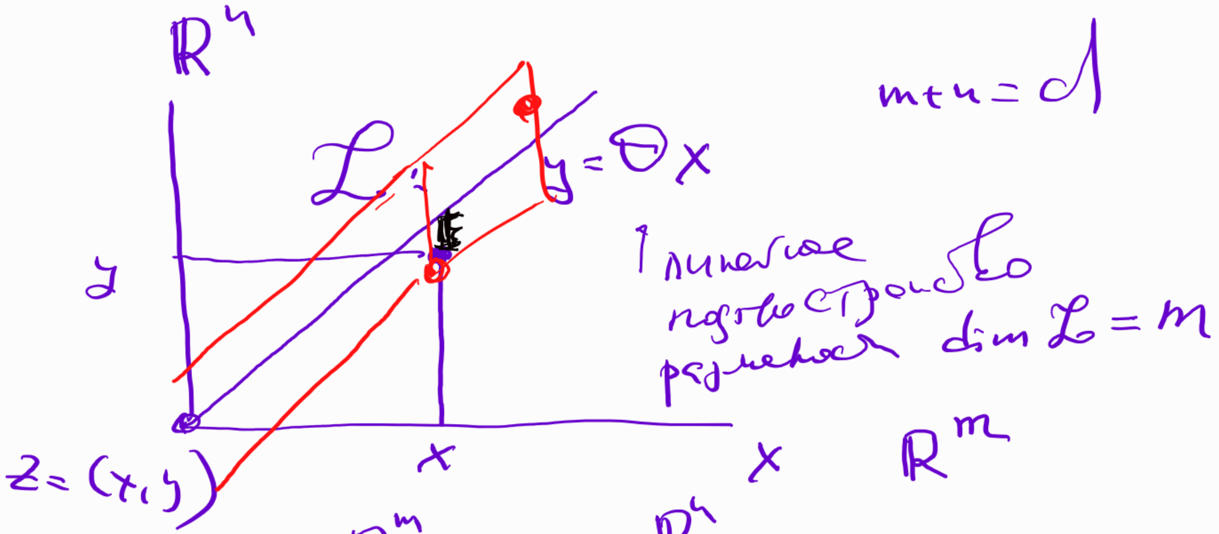
Отдельно дома проштудировать.

Диофантовы экспоненты и

гипотезе Шмидта – Зуммерера.

Основная проблема:

исследовать приближение к подпространствам.



$x \in \mathbb{R}^m$; $y \in \mathbb{R}^n$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ & & \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}$$

Простая нетривиальная ситуация

$$(*) \quad \boxed{\mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^d = \{0\}} \Longleftrightarrow \boxed{\Theta_j,\ e_i \text{ — лин. нез. над } \mathbb{Q}}$$

$$\Theta_j = \begin{pmatrix} \theta_{1j} \\ \theta_{nj} \end{pmatrix} \quad 1 \le j \le m$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 1 \le i \le n$$

$$y \in \mathbb{R}^n; \quad \|y\| = \max_{1 \le i \le n} |y_i| =$$

$$\|(y_1 \dots y_n)\| = \max_i \min_{q \in \mathbb{Z}} |y_i - q_i|$$

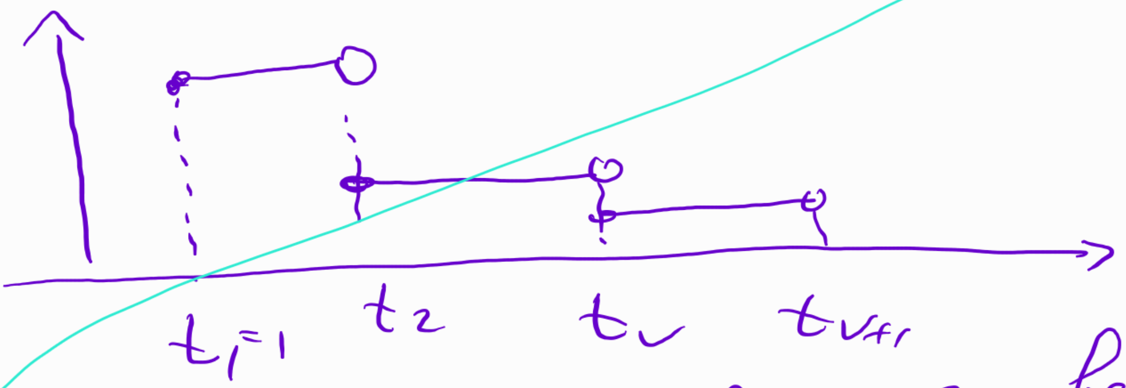
$$\psi_\Theta(t) = \min_{\substack{x \in \mathbb{Z}^m \\ 0 < |x| \le t}} \|\Theta x\| \qquad x = (x_1 \dots x_m), \quad |x| = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$$

$\boxed{t \geq 1}$

$$\boxed{\underline{\text{Утв}} \quad (*) \iff \psi_\Theta(t) \neq 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Утв}} \text{ (следствие теор. Минковского о вып. телах)} \\ \forall t \qquad \psi_\Theta(t) < t^{-\frac{m}{n}}\end{array}}$$

$\underline{\text{Утв}}$ $\psi_\Theta(t) \downarrow 0$ кусочно постоянная функция



t_ν — последовательность всех точек скачков.

$m = n = 1$ $\quad t_\nu$ — знаменатели подх. дробей к α (теор. Лагранжа)

не всегда

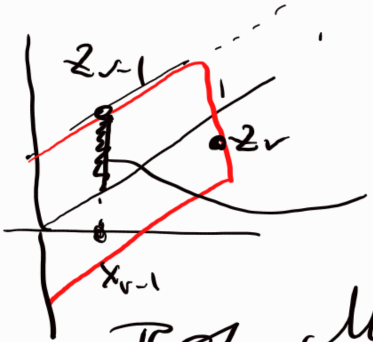
$\exists\, z_\nu = (x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{Z}^2$

$t = t_\nu$: ...

определен однозначно

лежащей не границе пустого параллелепипеда

$$\Pi_\nu = \{ z = (x, y) \in \mathbb{R}^d : |x| \le t_\nu, \ |y - \Theta x| < \psi_\Theta(t_{\nu-1}) \}$$



$\psi_\Theta(t_{\nu-1})$

$\|\Theta x_\nu\| = |\Theta x_\nu - y_\nu|$

$x_\nu \in \mathbb{Z}^m \quad y_\nu \in \mathbb{Z}^n$

Теор Минк:

$$\boxed{\psi_\Theta(t_{\nu-1}) = \|\Theta x_{\nu-1}\| < |x_\nu|^{-\frac{m}{n}}}$$

$\forall \varepsilon \quad \hat{\omega} - \varepsilon$

Если известна $\hat{\omega}$

<u>Ут</u> Если $m = 1$ или $n = 1$ и выполнено $(*)$ то вектор z_ν определен однозначно.

А при $m, n \ge 2$ это вообще говоря неверно.

<u>Нестандартное определение</u>: Матрица Θ <u>хорошая</u> если послед. векторов $z_\nu \in \mathbb{Z}^d$ определена однозначно

$m = 1$ совместные приближения ...

Θ – всегда хорошая

* $n=1$ при условии (*) Θ всегда хорошая.

* <u>Упражнение</u>: привести пример Θ при $m=n=2$ не являющейся хорошей но удовлетворяющей (*).

Равномерный Диофантов Экспонент.

$$\hat{\omega} = \sup\{\gamma : \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{\gamma}\psi_\Theta(t) < \infty\}$$

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}(\Theta) \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, |x_{\nu+1}|^{\gamma}\|\Theta x_\nu\|$$

По теор Минковского $\forall \Theta$ $\hat{\omega} \ge \frac{m}{n}$

<u>Утв</u> 1) при $m=1$ если $\Theta \notin \mathbb{Q}^n$ выполняется $\hat{\omega}(\Theta) \le 1$. (почти очевидно).

$m=1$ $\hat{\omega}(\theta) \ge \frac{1}{n}$ сами придум

[Если $\Theta \in \mathbb{Q}^{n\times m}$ ~~m=1~~ $\sim$ $\hat{\omega}(\Theta) = \infty$]

2) $\forall w \in \begin{cases} [\frac{1}{n}, 1] & m=1 \\ [\frac{m}{n}, \infty] & m>1 \end{cases}$ $\exists \Theta$ хорошая $\hat{\omega}(\Theta) = w$

Хинчин 1926
Ярник 195?
Roy $\left[\begin{smallmatrix} m=1 \\ n=1 \end{smallmatrix}\right.$ 2010?

всё верно

Теперь это следствие сложной теор. (Das – Fishman – Simmons – Urbański)!

очень сложн

Хаусдорф. размерности

$m+n=3$ M. Laurent

Обыкновенный Диофантов Экспонент

$$\omega = \omega(\Theta) = \sup\{\gamma : \underline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{\gamma}\psi_\Theta(t) < \infty\}$$

$$\hat{\omega}(\theta) \le \underbrace{\omega(\theta)}$$

Тривиальное неравенство.

Если $m=n=1$ и выполн (*)

то $\hat{\omega}(\theta) = 1$

$\theta \in \mathbb{R}$

$t \cdot \psi_\theta(t)$ $\qquad d(\theta) = \lim\limits_{t\to\infty} \overset{\gamma=1}{t\,\psi_\theta(t)} > 0$

$$\psi_\theta(t) < \frac{1}{t}$$

$$d(\alpha) - \varepsilon < t\,\psi_\theta(t) < 1 \quad \forall t$$

на подпосл.

Какие бывают иррац $\alpha \in \mathbb{R}$ числа Дирихле. Чему равно $d(\alpha)$?

Опр $d(\alpha) = \lim\limits_{t\to\infty} t\,\psi_\alpha(t) = 1$

$\Updownarrow$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}} = 1$$

$< 2\sqrt{F}$

Гипотеза Шмидта-Зуммерера

Теор Ярника 1940-1954 гг. ≥ 1

1) $m=1 \quad n=2$

$$\omega \geq \hat\omega \cdot \frac{\hat\omega}{1-\hat\omega}$$

2) $n=1 \quad m=2$

$$\omega \geq \hat\omega(\hat\omega - 1) \geq 1$$

Пусть G – максимальный корень уравнения

$$-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\hat\omega}{x^j} + 1 - \hat\omega + \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} x^j}_{m=1} = 0$$

(Ясно, что $G \geq 1$)

Тогда $\dfrac{\omega}{\hat\omega} \geq G$ (**)

(при условии (*))?

Пример для одной точки.

По условию:

$m=1 \quad n=3.$ M.

$m=3 \quad n=1$ S+S.

$m=1$ или $n=1$ Marnat – M, Roy – Nguyen – Poels – Rivard-Cooke.

$m, n \geq 2$ не доказано.

СМКЕ кажется, для нужно дополнительное условие не иррациональности $\mathcal{L}$)

Оптимальна (∞) следует из Теор Roy $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$

а $m, n \ \forall$.

Теор Пусть матрица Θ хорошая и $\exists\ \infty$ много ν таких что

$$z_\nu,\ z_{\nu+1},\ \ z_{\nu+d-1}$$

линейно независимы над $\mathbb{R}^d$

(условие на матрицу Θ).

Тогда гипотеза верна.

Johannes Schleischitz

Док-во — проведем только в случае $m = 1$

Многочлен

$$1-\hat{\omega} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\hat{\omega}}{X^j} \quad \Big| \; X^{n-1}$$

$$X^{n-1}\,\frac{1-\hat{\omega}}{\hat{\omega}} = 1+X+\dots+X^{n-2}$$

$$\boxed{X^{n-1} = \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}\left(1+X+\dots+X^{n-2}\right)}$$

Теор Ярника $\longrightarrow$ $n=2$ $\left\{\begin{aligned} &X=\frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}} \\ &\frac{\omega}{\hat{\omega}} \geq \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}\end{aligned}\right.$

$z_\nu \quad z_{\nu+1} \,.\, z_{\nu+n} \qquad d=m+n=1+n$

$\|\Theta x_\nu - y\|$

Независимые векторы последовательных наилучших приближений

$\mathbb{Z}^{n+1} \ni z_\nu = (x_\nu \; Y_{1\nu} \dots Y_{n\nu})$

общий знаменатель

числители

$$1 \leq \left|\det\left(z_\nu\, z_{\nu+1} \;\; z_{\nu+n}\right)\right| =$$

$$
= \left| \begin{vmatrix} x_\nu & y_{1\nu} & \dots & y_{n\nu} \\ x_{\nu+1} & y_{1\nu+1} & \dots & y_{n\nu+1} \\ \vdots & & & \\ x_{\nu+n} & y_{1\nu+1} & \dots & y_{n\nu+n} \end{vmatrix} \right| =
$$

ν — номер приближения

$\Theta \in \mathbb{R}^n$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{pmatrix}$$

$m = 1$

$$
= \left| \begin{vmatrix} x_\nu & y_{1\nu} - \Theta_1 x_\nu & \dots & y_{n\nu} - \Theta_1 x_\nu \\ x_{\nu+1} & y_{1\nu+1} - \Theta_1 x_{\nu+1} & \dots & \\ x_{\nu+2} & & & \\ \vdots & & & \\ x_{\nu+n} & y_{1\nu+n} - \Theta_1 x_{\nu+n} & & y_{n\nu+n} - \Theta_n x_\nu \end{vmatrix} \right| \le
$$

$\psi(x_\nu) > \psi(x_{\nu+1})$

$x_\nu < x_{\nu+1} < x_{\nu+2}$

$$\le (n+1)!\, x_{\nu+n} \underbrace{\psi_\Theta(x_{\nu+n-1})\, \psi_\Theta(x_{\nu+n-2}) \cdots \psi_\Theta(x_\nu)}_{n \text{ множителей}}$$

$\forall \varepsilon \ \forall j \geq j_0(\varepsilon)$

$$\boxed{\psi_\Theta(x_j) \le x_{j+1}^{-\hat{\omega}+\varepsilon}}$$

$$\hat{\omega} = \sup\{\gamma : \varlimsup_{j\to\infty} x_{j+1}^{\gamma}\, \psi(x_j) < \infty\}$$

Вывод

$$\boxed{1 \ll \underbrace{x_{j+n} \cdot x_{\nu+n}^{-\hat{\omega}+\varepsilon}}\ \cdots\ x_{\nu+1}^{-\hat{\omega}+\varepsilon}}$$

Т.к. $x_{j+1}^{\hat{\omega}-\varepsilon}\, \psi(x_j) < C$

$$\psi(x_j) \le \frac{C}{x_{j+1}^{\hat{\omega}-\varepsilon}}$$

Πρέπει ... $\forall j \quad x_{j+1} \le x_j^{g}$

$$1 \ll x_{\nu+n}^{1-\hat{\omega}+\varepsilon} \quad x_{\nu+n-1}^{-\hat{\omega}+\varepsilon} \quad \cdots \quad x_{\nu+1}^{-\hat{\omega}+\varepsilon} \ll$$

$$\ll x_{\nu+n}^{1-\hat{\omega}+\varepsilon} \quad x_{\nu+n}^{\frac{-\hat{\omega}+\varepsilon}{g}} \quad x_{\nu+n}^{\frac{-\hat{\omega}+\varepsilon}{g^2}} \cdots$$

$$x_{\nu+n} \to \infty$$

$\forall \varepsilon$;

$$0 \le 1-\hat{\omega}+\varepsilon + \frac{-\hat{\omega}+\varepsilon}{g} + \cdots + \frac{-\hat{\omega}+\varepsilon}{g^{n-1}}$$

ε - μόνο ... ;

$$0 \le 1-\hat{\omega} - \hat{\omega}\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \cdots + \frac{1}{g^{n-1}}\right)$$

$$1-\hat{\omega} = \hat{\omega}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

G

$\boxed{g \ge G}$

$$x^{n-1} = \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}\left(1+x+\cdots+x^{n-2}\right)$$

$\forall \varepsilon$

$$\exists j : \quad x_{j+1} \ge x_j^{G-\varepsilon}$$

$$(G-\varepsilon)(-\hat{\omega}+\varepsilon)$$

$$! \quad 4(x_j) \ll x_{j+1}^{-\hat{\omega}+\varepsilon} \le x_j$$

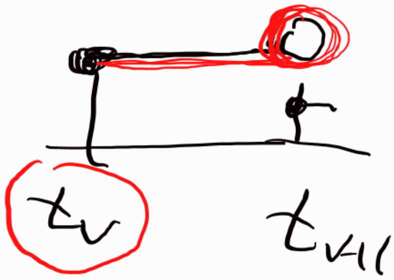
$$\ldots \ge (G-\varepsilon)(\hat{\omega} - \varepsilon) \quad \forall \varepsilon$$

$$\omega \geqslant (G-\varepsilon)(\hat\omega-\varepsilon) \quad \forall\varepsilon$$

$$x_{j+1}^{-\hat\omega+\varepsilon}\,\psi(x_j) < C$$

Повторим

$$\psi(x_j) \ll x_{j+1}^{-\hat\omega+\varepsilon}$$



$$t^{\hat\omega-\varepsilon}\,\psi(t) < C \quad \forall t$$

$$x_{j+1}^{\hat\omega-\varepsilon}\,\psi(x_j) < C$$

$\varepsilon \to 0$

$$\omega \geqslant G\cdot\hat\omega$$

$$\frac{\omega}{\hat\omega} \geqslant G,$$

Докажем!

Теор Если $m+n \geqslant 4$ то

∃ хорошее Θ узлов (∗)

Такие что

$$\forall \nu \quad \operatorname{rk}(z_\nu, z_{\nu+1}, \ldots, z_{\nu+d-1}) \le 3$$

Schleischitz недавно оценил снизу хаусдорфову размерность таких множеств.

<u>Замечание</u> Условие теоремы выполнено для п. всех матриц Θ.

Контрпример матричный

<u>Замечание</u> Если $n \geq m \geq 2$ то может оказаться матрица Θ – хорошая,

Но $\exists\ \mathfrak{A} \subset \mathbb{R}$

$\nexists$ вещерное подмножество

что $z_v \in \mathfrak{A}$.

(Тогда $\underline{\hat{\omega} = 1}$)

$\frac{m}{n} = \frac{2}{3} < 1$ $m=2$ $n=3$

$\hat{\omega} = \frac{2}{3}$ $\sigma = 1$