29 апреля 2023

С/к "Задачи теории диофантовых приближений"

Внутренние приближения на квадратичных поверхностях.

Kleinbock + Merrill

Теор Гурвица $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\exists \text{ б.м. } \frac{p}{q} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

$\sqrt{5}$ — точная константа

$$\lambda(\alpha) = \liminf_{t \to \infty} t\, \psi_\alpha(t)$$

$$\mathbb{L} = \{\lambda : \exists \alpha \ \lambda = \lambda(\alpha)\}.$$

Теорема Маркова

$$\mathbb{L} : \quad \frac{1}{3} \quad \underbrace{\cdots \frac{1}{\frac{\sqrt{221}}{10}} \quad \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}}_{\text{дискретная часть}}$$

Далее Гал Фрейман: дискретная часть $\in \mathbb{L}_2$

$$\alpha + \beta \neq \alpha' + \beta'$$

$$\alpha - \alpha' \neq \beta' - \beta$$

Жители окружности.

$$\sigma^1 = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\} \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(\frac{A}{Q}, \frac{B}{Q}\right) \in \sigma^1 \cap \mathbb{Q}$$

$(b,q)=1$

Для единичного требуем нод$(A,B,Q)=1$.

$$\begin{cases} \dfrac{A}{Q} = \dfrac{2qb}{q^2+b^2} \\ \dfrac{B}{Q} = \dfrac{q^2-b^2}{q^2+b^2} \end{cases}$$

Задача: Дано: q, b. Найти Q.

Ответ:
$$(*)\quad Q = \begin{cases} q^2+b^2 & q \not\equiv b\ (2) \\ \dfrac{q^2+b^2}{2} & q\equiv b \equiv 1\ (2) \end{cases}$$

Теор 1 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \sigma^1 \setminus \mathbb{Q}$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ б.м. $\left(\frac{A}{Q}, \frac{B}{Q}\right) \in \sigma^1$, $(A,B,Q)=1$, $A^2+B^2=Q^2$:

$$\sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{A}{Q}\right)^2 + \left(\alpha_2 - \frac{B}{Q}\right)^2} \le \frac{\sqrt{2}+\varepsilon}{Q}.$$

Теор 2 Постоянная $\sqrt{2}$ в теор 1 ~~точна~~, она выписана

$\sqrt{5}$ превращается $\frac{1}{\sqrt{8}}$ из-за формул. $(*)$

Дискретные части спектра Лагранжа приближения на σ^1

20.. Донг Нан Ким + ...

197.. Asmus Schmidt

Многомерный аналог формулы (∞)

$$\sigma^n := \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$ $\qquad b_i \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}_+$

$$t_j = \frac{b_j}{q} \qquad (b_1, \dots, b_n, q) = 1$$

$$\left(\frac{A_1}{Q}, \dots, \frac{A_{n+1}}{Q}\right) \in \sigma^n \cap \mathbb{Q}^{n+1}$$

$$(A_1, \dots, A_{n+1}, Q) = 1$$

$$\frac{A_j}{Q} = \frac{2 b_j q}{q^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{A_{n+1}}{Q} = \frac{q^2 - b_1^2 - \dots - b_n^2}{q^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1}{Q} \\ \frac{A_2}{Q} \\ \vdots \\ \frac{A_n}{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b_1 q}{q^2 + b^2} \\ \frac{2 b_2 q}{q^2 + b^2} \\ \vdots \\ \frac{q^2 - b^2}{q^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

Вопрос: Если $b_1^2 + \dots + b_n^2 \equiv 0\ (q)$, то $Q \leq \dfrac{q^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2}{q}$

Задача. Доказать, что $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\exists$ б.м. $q \in \mathbb{Z}_+$

$$q \mid [\alpha q]^2 + [\beta q]^2.$$

нерешенная

Теор Клейнбока – Меррилла.

$\exists\, C(n) \quad \forall\, \alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}) \in S^n$

$\exists$ б.м. $\vec{A}/Q \in \mathbb{Q}^{n+1}$

$$\left|\alpha - \frac{A}{Q}\right|_2 \le \frac{C(n)}{Q}.$$

$n = 1, 2$ из всех точное значение $C(n)$

КМ: $C(n)$ неэффективна

М. $C(n)$ эффективна ($n = 2$ – сегодня расскажу это почти очевидно)

это будет рассказано

$n > 2$ – не расскажу: надо использовать последовательные мин. и теорему Касселса.

Теор. А

Пусть $(\beta_1, \beta_2) \notin \mathbb{Q}^2$

Тогда $\exists$ б.м. $\left(\frac{b_1}{q}, \frac{b_2}{q}\right) \in \mathbb{Q}^2$ таких что

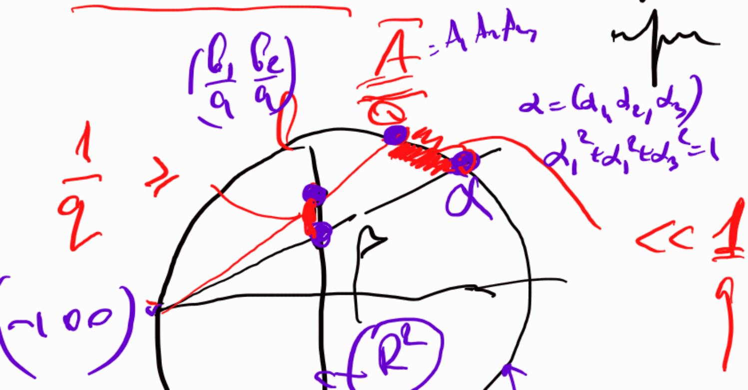
$$\text{(1)} \quad \sum_{i=1}^{2} (q\beta_i - b_i)^2 < 1$$

$$\text{(2)} \quad b_1^2 + b_2^2 \equiv 0 \pmod q.$$

$\beta_i - \frac{b_i}{q} \le \frac{1}{q}$

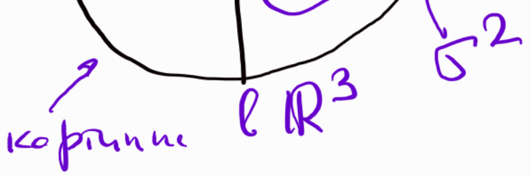
$b_i << q$

Замечание $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = Q^2$ Теор Кл. Мер. $\Leftarrow$ Теор. А при $n = 2$



$\Gamma_i := q\beta_i - b_i$

$\beta_1^2 + \beta_2^2$



$Q = \dfrac{q + \ldots}{q} \asymp q$

$Q = Q(q, \ell)$ $\left(\dfrac{A_1}{Q}, \dfrac{A_2}{Q}, \dfrac{A_3}{Q}\right)$

Сейчас будем доказывать теорему A | α

Рассмотрим квадратичную форму.

$$f(w) = zy - x_1^2 - x_2^2 = \xi^2 - \eta^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$r^2 = \eta^2 + x_1^2 + x_2^2$$

$$w = (z, y, x_1, x_2) = (\xi, \eta, x_1, x_2)$$

обобщ. здесь $n = 3$: $zy - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

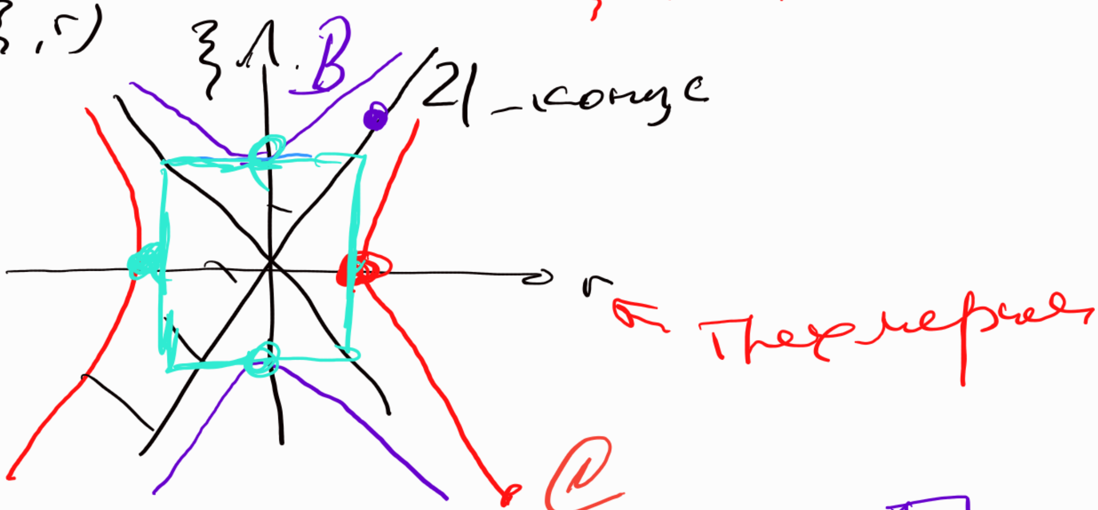
$$\begin{cases} z = \xi + \eta \\ y = \xi - \eta \end{cases} \quad \det =$$

$$P = \{ w : |f(w)| \le 1 \}.$$

$\mathfrak{A} = \{ f(w) = 0 \}$, $\xi^2 - r^2 = 0$; $\quad B = \{ f(w) = 1 \}$, $\xi^2 - r^2 = 1$

$C = \{ f(w) = -1 \}$, $\xi^2 - r^2 = -1$.

в координатах (ξ, r)



P — это то, что внутри

$K \subset P$

$r^2 = \eta^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$K = \{ w \in \mathbb{R}^4 : |\xi| < 1;\ r^2 = \eta^2 + x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$$

Ул $K \subset P$.

Упр посчитать $\mathrm{Vol}_4 K = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot dt = \frac{16\pi}{3}$

в коорд. z, y, x_1, x_2

$$\mathrm{Vol}_4 K > 16$$

$$K \cap \mathbb{Z}^4 \ni z \neq 0$$

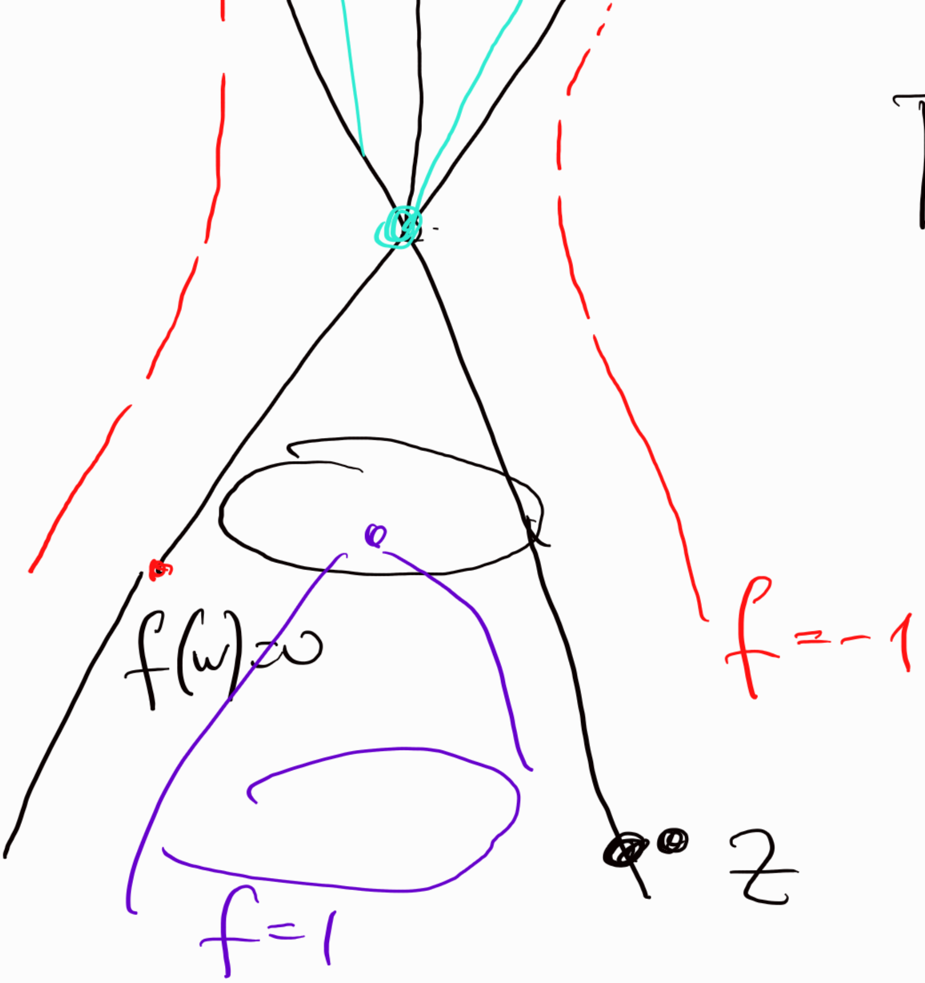
См $\mathrm{Vol}_3 K < 32$ при $n=3$ Минковский не проходит

Автоморфизм формы f

$$G_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det G_t = 1$$

$$f(G_t w) = f(w)$$

$$f(w) = zy - x_1^2 - x_2^2$$



$P_{\partial z} \in \mathbb{Z}^5$

$\det R_\beta = 1$

$$f(z) \in \mathbb{Z}$$

$$R_\beta = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^2+\beta_2^2 & 1 & -2\beta_1 & -2\beta_2 \\ -\beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} z \\ y \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$\forall_\beta \quad f(R_\beta w) = w$$

$$\begin{pmatrix} z' \\ y' \\ x_1' \end{pmatrix}, \quad R_\beta \begin{pmatrix} z \\ y \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z(\beta_1^2+\beta_2^2) + y - 2\beta_1 x_1 - 2\beta_2 x_2 \end{pmatrix}$$

$x(1)$ $\qquad x_1 - \beta_1 z$

$\qquad \dot{x}_2 - \beta_2 z$

$$z'y' - x_1'^2 - x_2'^2 = zy - x_1^2 - x_2^2$$

$$z^2(\beta_1^2+\beta_2^2) + zy - 2\beta_1 x_1 z - 2\beta_2 x_2 z -$$
$$-(x_1-\beta_1 z)^2 - (x_2 - \beta_2 z)^2 =$$
$$= zy - x_1^2 - x_2^2$$

$\forall \beta \ \forall t$

$$\exists z \in R_\beta^{-1} G_t K \subset P$$
$$z \in \mathbb{Z}^4$$

Теор. Минк. о выпуклом теле.

$z \in P \cap \mathbb{Z}^4 \Rightarrow f(z)=0$, $qA = b_1^2 + b_2^2$

$$z = (q, A, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4.$$

$$g = G_t^{-1} R_\beta z \in K$$

$$g = \begin{pmatrix} q/t \\ t\left(q(\beta_1^2+\beta_2^2) + A - 2\beta_1 b_1 - 2\beta_2 b_2\right) \end{pmatrix}$$

y

П

К.С.Т.

L

$b_1 - \beta_1 q$

$b_2 - \beta_2 q$

$$\{|\xi|<1\ ;\ \eta^2+x_1^2+x_2^2<1\}$$

$$(b_1-\beta_1 q)^2+(b_2-\beta_2 q)^2 \le 1$$

условие (1) доказано.

~~$(2)\quad q \mid b_1^2+b_2^2$~~

Почему (2) верно.

То, что точек бесконечно много следует из того, что мы можем брать произвольные t

$$(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Q}^2$$

$$A = \frac{b_1^2 + b_2^2}{q}$$

$$L = q(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \frac{b_1^2 + b_2^2}{q} - 2\beta_1 b_1 - 2\beta_2 b_2$$

$$|tL| < 1$$

$$= \frac{(q\beta_1 - b_1)^2 + (q\beta_2 - b_2)^2}{q}$$

$$L < \frac{1}{t} \qquad L \to \infty$$

$$t \to \quad w = w(t) \in \mathbb{Z}^4$$

Теор A доказана.

Попробуем обобщить теор A на случай $n \geq 2$.

У нас будет еще

2 занятия

6 и 13 мая