11 феврале 2023 г.

Семинар по Диофантовым приближениям

$\times 2 \times 3$

Теорема Фюрстенберга

В 1967 Фюрстенберг доказал, что Если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

то $\{2^n 3^m \alpha\}$ $m, n \in \mathbb{N}$

всюду плотно в $[0,1]$

"Разумно эффективный" результат (arXiv)

Some effective results for $\times a \times b$

2009 J. Bourgain, E. Lindenstrauss, P. Michel, A. Venkatesh. $a \leftrightarrow 2$, $b \leftrightarrow 3$ $(a,b)=1$ (предположение)

Теор. При некоторых естественных ограничениях

$\{ \{a^u b^v \alpha\} : u, v \leq M \}$ содержит

ε-сеть на отрезке $[0,1]$

$\frac{1}{\ldots}$ $\quad \varkappa = \varkappa(a, b) > 0$

$< \varepsilon = \dfrac{\quad}{(\log\log M)^{\alpha}}$.

Д-во использует:

- энтропию.
- меры

\+ применяется "эффективная версия теоремы Рудольфа-Джонсона).

Программа

- Разговор о формулировках и историях
- Классический Background.
- Комбинаторная составляющая
- Аналитическая составляющая.

Gayfulin, Moshchevitin
"On Furstenberg Diophantine Result"
arXiv.

О формулировках $(a,b)=1 \quad a,b\in\mathbb{Z}_+$

$$\Sigma = \{a^u\cdot b^v : \ u,v\in\mathbb{Z}_+\} \qquad \mathbb{Z}_+=\{0,1,2..\}$$

$$\Sigma_\alpha = \{\{q\alpha\} : q\in\Sigma\}.$$

$$\Sigma(M) = \{q\in\Sigma : q\le M\}$$

$$\Sigma_\alpha(M) = \{\{q\alpha\}. \ q\in\Sigma(M)\}.$$

<u>Теор1</u>

Тогда $\forall\delta,\varepsilon>0 \quad \exists Q_0=Q_0(a,b,\delta,\varepsilon)$:

$\forall Q\ge Q_0 \quad \forall A$ с условием $(A,Q)=1$ для $\alpha=\dfrac{A}{Q}$

$\ \Sigma\,(Q^{1+\delta})$

Множество $\sum_{\alpha}(Q$ $)$

содержит

$$\frac{1}{(\log\log\log Q)^{1/8-\varepsilon}} \text{ — сеть.}$$

Пояснения $\quad \alpha = \frac{A}{Q}$

$$\sum_{\alpha=\frac{A}{Q}} \left(Q^{1+\delta}\right)$$

$$\left\{\frac{A}{Q}\cdot q\right\} \quad q = a^u b^v \le Q^{1+\delta}$$

$$u, v \le \log Q$$

связь параметров M и Q

$$\left(M \le \log Q\right)$$

$a = 2 \quad b = 4 \qquad 000$

$\{2^u \alpha\}, \qquad \alpha$

Замечание

Во всех теоремах достаточно любая мультипликативно независимые a и b

$$a^x b^y = 1 \Rightarrow x = y = 0$$

$x, y \in \mathbb{Z}$

Наука $\{\xi^n \alpha\}$

$\xi \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Двинемся дальше.

(РАВНОМЕРНАЯ) глобальная теорема

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists \ Q:$

$$1 \le Q \le N$$

$$\left|\alpha - \frac{A}{Q}\right| \le \frac{1}{QN}$$

$\|Q\alpha\| < 1/N$

локальная теорема

Теорема Дирихле прибл. вещ. числа

Следств. Если α иррационально, то $\exists$ беск. много A/Q таких что

$$\left|\alpha - \frac{A}{Q}\right| \le \frac{1}{Q^2} \quad (A, Q) = 1.$$

Упражнение: Докажите теорему Чебышёва

$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad \exists$ б.м. $q \in \mathbb{Z}_+$:

$\beta \in \mathbb{R}$ $\quad \|q\alpha - \beta\| < \dfrac{3}{q}$ ← наил. константа

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ [Хинчин]

указание: $\left\{ \frac{A_k}{Q} \right\}$ $\quad 1 \le k \le Q$, $(A,Q)=1$

как множество $\left\{ \frac{k}{Q} \right\}$

$$\left|\alpha - \frac{A}{Q}\right| < \frac{1}{Q^2} \qquad q \in \Sigma\left(Q^{1+\delta}\right)$$

$$\left|q\alpha - \frac{Aq}{Q}\right| < \frac{1}{Q^{1-\delta}}$$

дробные доли этих штук образуют $\dfrac{1}{(\log\log\log Q)^{1/8-\varepsilon}}$ сеть.

А это тонко.

Следствие 1 Если $\alpha \notin \mathbb{Q}$ то $\exists$ б.м. Q

что $\Sigma_\alpha\left(Q^{1+\delta}\right)$ образует

$\dfrac{1}{\log\log\log Q^{1/8-\varepsilon}}$ – сеть

иными словами

$\forall \alpha \notin \mathbb{Q}$ $\quad \forall \beta$ $\quad \exists$ б.м. $q \in \Sigma$

такие что $\quad \|q\alpha - \beta\| < \dfrac{1}{(\log\log\log q)^{1/8-\varepsilon}}$

Упр: в Архивной статье Б-М найти равномерную формулировку и понять её.

- **Background**

[a, b независимы, $\quad \exists\, c_1, c_2 > 0$

$$\left| \frac{\log a}{\log b} - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{c_1}{q^{c_2}}$$

потом это будет β

Метод А. Бейкер — результат Н.И. Фельдмана.

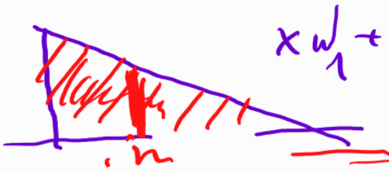
сложный чёрный ящик.

Простой чёрный ящик. Теорема Харди–Литтлвуда. (теорема о "суммах дробных долей")

α, β $\qquad x, y > 0$

$x, y \in \mathbb{Z}$ $\qquad x\omega_1 + y\omega_2 \le t$

$T(t)$ — кол-во решений.



$x\omega_1 + y\omega_2 = t$ считаем кол-во целых точек здесь.

Теор

$$T(t) = \frac{t^2}{2\omega_1\omega_2} - t\left(\frac{1}{2\omega_1} + \frac{1}{2\omega_2}\right) + O_{\beta'}\left(t^{1-\frac{1}{\beta-1}}\right)$$

где β такое, что $\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\beta'}{q^{\beta}}$

$\left[\frac{\cdot}{n}\right] = \frac{\cdot}{n} - \{\ \}$ здесь стоит остаток.

и это просуммируется хорошо тоже

Черные ящики кончились.

У нас был

$$\omega_1 = \log a \qquad \beta = c_2$$
$$\omega_2 = \log b$$

$\boxed{\text{Случай} \quad a = 2 \quad b = 3.}$

Какое наилучшее β известно для этого случая

$$\forall \frac{p}{q} \quad \left| \frac{\log 2}{\log 3} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^{\beta_0}} \qquad \beta_0 = 5.116201$$

Теор Salikhov + Bondareva + Luchin.

Черный ящик № 1 $\cup$ Черный ящик № 2

$$\boxed{\begin{aligned} T(t) &= \#\{x, y \in \mathbb{N} : x \log a + y \log b \leq t\} = \\ &= \frac{t^2}{2 \log a \log b} - t\left(\frac{1}{2\log a} + \frac{1}{2\log b}\right) + O\left(t^{1 - \frac{1}{\beta - 1}}\right) \end{aligned}}$$

Следствия черных ящиков:

1) $$\#\underset{\{q = a^n b^v :\ q \leq M\}}{\Sigma(M)} = T(\log M) \sim \frac{(\log M)^2}{2 \log a \log b}$$

$M \to \infty$

$$\Sigma = q_1 = 2,\ q_2 = 3,\ q_3 = 4,\ q_4 = 6 -$$

2) $\log q_\nu \sim \sqrt{2\nu \log a \log b}$

$T(\log q_\nu) = \nu$

3) $q_{\nu+1} - q_\nu \ll_{a,b} \dfrac{q_\nu}{(\log q_\nu)^{\frac{1}{\beta-1}-\varepsilon}}$

$\boxed{T(t+\Delta) - T(t) > 0}$

упрощенное
доказ-
во.

Указание: выбрать Δ,

так, чтобы