11 марта 2023г.

Семинар "Диофантовы приближения"

x2x3 теорема Фюрстенберга

(продолжение)

Об аналитической части.

Подвод комбинаторики части. $\alpha = \frac{A}{Q}$

M $\quad N \asymp (\log\log M)^{\frac{1}{\beta-1}-\varepsilon}$ $\quad a^n = N$

$\Delta \asymp \frac{1}{(\log\log M)^{\frac{1}{\beta-1}-\varepsilon}}$ $\quad n \asymp \log\log\log N$

$M_1 = M\cdot Q$

$$\mathcal{X}_n^R = \left\{ x \in \mathbb{Z}_+ \quad x \le a^n - 1 \quad \exists\, \eta \in \Sigma_\alpha(R) \quad \frac{x}{a^n} \le \eta < \frac{x+1}{a^n} \right\}$$

$$\Sigma_\alpha(R) = \{\{q\alpha\} \quad q = a^u b^v \le R\}$$

$$\mathcal{X}_{n,s}^R = \left\{ x \le a^s - 1 \quad \exists\, x^* \in \mathcal{X}_n^R \quad x \equiv x^* \pmod{a^s} \right\}$$

$$\boxed{\mathcal{X}_{n,s}^{M_1} \subset \mathcal{X}_n^{M_2} \quad M_2 = M_1 a^{n-s}}$$

$n \geqslant s \geqslant \ell = \bar{o}(n)$ $\quad \pmod{a^{s-\ell}}$

$$\mathcal{X}_{n,s,l}(\lambda) = \{ x \in \mathcal{X}_{ns} : x \equiv \lambda \pmod{a^{s-l}} \}$$

Основная комб лемма:

$\forall \varepsilon \ \forall n \geq n_0(c, \varepsilon) \ \exists s : \ \varepsilon n \leq s \leq n$

$\exists \lambda : \ 0 \leq \lambda < a^{s-l}$

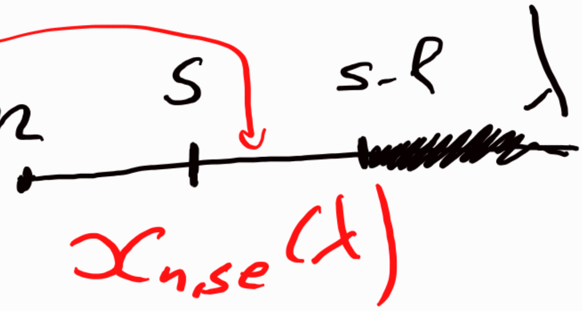
такие что

$$X_{nse}(\lambda) = |\mathcal{X}_{n,s,e}(\lambda)| > a^{(\frac{1}{2} - 2\varepsilon) l}$$

свободные позиции

a^l элементов

$\geq \sqrt{a^l}^{\,1-\varepsilon}$



$$\alpha = \frac{A}{Q} \quad \underline{\Sigma(M_1)} \quad M_1 = MQ \quad M = Q^\delta$$

$x \in \mathbb{Z}_+ \qquad 0 \leq x_0 \leq a-1$

$x = x_0 + a x_1 \qquad x_0$ – первая цифра

$$T_a(x) = \left[\frac{x}{a}\right] = x_1$$

$$\mathcal{Y} = T_a^{s-l} \mathcal{X}_{n,se}(\lambda)$$

мы выкидываем последние $s-l$ цифры из элементов $\mathcal{X}_{nse}(l)$

/ будет

меньше

$\mathcal{X}_{n,se}(\lambda)$

$$x = \lambda + y a^{s-\ell} \qquad \frac{x}{a^s} = \frac{\lambda}{a^s} + \frac{y}{a^\ell}$$

$$Y = |\mathcal{Y}| = X_{nse}(\lambda) \qquad \geq a^{\frac{\ell}{2}} \cdots \approx \sqrt{Y}$$

Определим $\gamma = \frac{\lambda}{a^s}$

Следствие Основной комбинаторной леммы

$\forall y \in \mathcal{Y} \quad \exists q \in \Sigma(M_2)$ таких что ℓ^w

$$\left| \frac{y}{a^\ell} + \gamma - \{q\alpha\} \right| \leq \frac{1}{a^s} \quad \Sigma$$

$y < \frac{1}{a^\ell}$ сетки $\quad a^\ell$

$Y = |\mathcal{Y}| = \mathcal{b}^{\ell^{1-\varepsilon}} \qquad b^{a^\ell}$

$\gamma +$

$\frac{1}{a^n}$

$\frac{1}{a^n} \quad X_n \quad \Sigma_\alpha \quad \frac{1}{a^s}$

$\{q\alpha\}$

$x_{n,s\ell} \qquad s\ \ell\ \lambda \qquad \lambda \bmod a^{s-\ell}$

$s \quad s-\ell$

$Y + \gamma_{y \bmod a^\ell}$

Оценим

ℓ-мелкие

Хорошо $s \geq \varepsilon n$ больше

Классика

Общий приём.

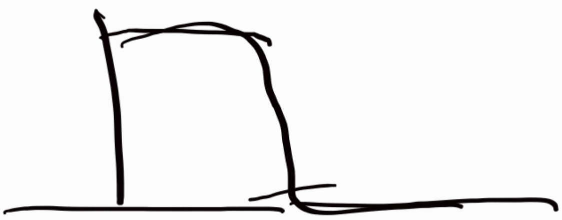
$(b, a) = 1$ $\quad b \mod a^l$

$\operatorname{ord}_{a^l} b \gg_{a,l} a^l$

Переходим к аналитике. Мы живём по $\mod a^l$ и нужно распределение точек вида

$y \cdot b^w$ $\quad y \in Y$

$1 \leq w \leq \operatorname{ord}_{a^l} b$



Классические леммы.

$(a, b) = 1$ $\quad \mod a^l$

$l \to \infty$

$b^{\operatorname{ord}_{a^{l-1}}}$

$\$ = \langle b \rangle = \{1, b, b^2, \ldots\}$ $\bmod a^l$.

(условно: $S = |\$| \geq \varkappa_1 a^l$)
$\varkappa_1 = \varkappa(a, l)$.

Основное равенство.

$$\sum_{s \in \$} e^{2\pi i \frac{ms}{a^l}} = \sum_{w=0}^{S-1} e^{2\pi i \frac{mb^w}{a^l}}$$

Лемма 1

$\exists \varkappa = \varkappa(a, l)$
$l_1 = l - \varkappa$

$$\left| \sum_{s \in \$} e^{2\pi i \frac{ms}{a^l}} \right| \leq \begin{cases} 0 & m \not\equiv 0 \pmod{a^{l_1}} \\ S & m \equiv 0 \pmod{a^{l_1}} \end{cases}$$

$S = |\$|$

первая классическая лемма

мы изучаем р.р. $\to$ $y b^w$

Лемма 2

вторая класс. лемма

$$\sigma(m) = \sum_{y \in Y} e^{2\pi i m \left(\frac{y}{a^l} + \gamma\right)}$$

$$\sigma = \sum_{s\in \$} |\sigma(ms)|^2 \le w_m S Y$$

$$w_m = a^{\varkappa}(a^{\ell}, m)$$

Док:

$$\sigma = \sum_{s}\sum_{y\,y'} e^{2\pi i \frac{ms(y-y')}{a^{\ell}}} \le S \sum_{\substack{y,y'\in \mathcal{Y} \\ y\equiv y' (\mathrm{mod}\, a_m)}} 1 =$$

$s\in \$$

$$a_m = \frac{a^{\ell}}{(a^{\ell}, m)}$$

$$\frac{m}{a^{\ell}}$$

$$= S \sum_{\substack{y'' (\mathrm{mod}\, a^{\ell}) \\ y''\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, a_m)}} \sum_{y\, \mathrm{mod}\, a^{\ell}} \chi(y)\chi(y+y'') \le$$

χ – хар-функция мн-ва $\mathcal{Y}$

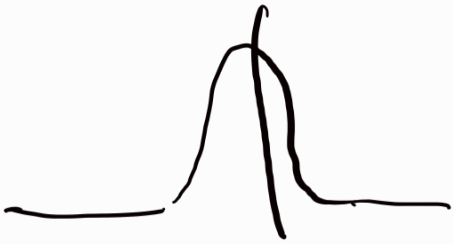
$$\le S \sum_{y''} \underbrace{\sqrt{\sum_{y} (\chi(y))^2}\sqrt{\sum_{y} (\chi(y))^2}}_{Y}$$

$$= SY\left(\sum_{y''} 1\right) = W_m$$

лемме Донгасне.

Формулировка основной Аналитической леммы

$f(t)$ 1-периодическая гладкая функция



$$R_s[f, \mathcal{Y}] = \frac{1}{Y}\sum_{y\in\mathcal{Y}} f\left(s\left(\frac{y}{q^e}+\gamma\right)\right) - \int_0^1 f(t)\,dt$$

эти аргументы не пишем

Основная Анал. лемма

$$\frac{1}{q}\sum |R|^2 \ll \frac{\int_0^1 |f'(z)|^2\,dz}{\ldots}$$

$$S \quad \sum_{s\in\$} \quad s \qquad q,\ell \qquad Y$$

Основное следствие:

$\exists\, s = \ell^w \in \$$ такое, что

$$|R_s| \ll_{q,\ell} \frac{\|f'\|_2}{\sqrt{Y}} \qquad \|f'\|_2^{1/2}$$

Доказываем основную лемму

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m e^{2\pi i m t} \quad \text{— разложение в ряд Фурье.}$$

$$R_s = \frac{1}{Y} \sum_{m\neq 0} f_m\, \sigma(ms) \cdot \frac{m}{m} \qquad \text{Коши–Буняковский}$$

$$|R_s|^2 \le \frac{1}{Y^2} \sum_{m\neq 0} (m|f_m|)^2 \cdot \sum_{m\neq 0} \left(\frac{|\sigma(ms)|}{m} \right)^2 =$$

$$\sum_{m\neq 0} (m\cdot|f_m|)^2 = \|f'\|_2^2 \qquad = \frac{\|f'\|_2^2}{Y^2} \sum_{m\neq 0} \left| \frac{\sigma(ms)}{m} \right|^2$$

$$\sum_{s\in\$} |R_s|^2 \ll \frac{\|f'\|_2^2}{Y^2} \cdot \sum_{m\neq 0} \frac{1}{|m|^2} \sum_{s\in\$} |\sigma(ms)|^2$$

$$\|$$

$$S\cdot\|f\|_2^2$$

$$\boxed{\sum_{s \in \mathcal{S}} |R_s|^2 \ll \frac{\;^2}{Y} \sum_{m \neq 0} \frac{w_m}{m^2}} \qquad Y w_m$$

Упражнение: Докажете, че

$$\sum_{m \neq 0} \frac{w_m}{m^2} \leq \frac{a}{\varphi(a)}$$