НМУ, Аналитические аспекты алгебраической теории чисел
Листок 1. 13.02.2024

Задача 1. Докажите, что кольца $\mathbb{Z}[i]$ и $\mathbb{Z}[\omega]$ евклидовы относительно стандартной нормы. Сформулируйте и докажите критерии представимости натурального числа в виде x^2+y^2 и x^2+xy+y^2 с целыми x, y.
Задача 2. Назовем арифметической функцией произвольное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Арифметическая функция f называется мультипликативной, если $f(ab) = f(a)f(b)$ для взаимно простых a и b. Определим свёртку Дирихле формулой

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Докажите, что свёртка мультипликативных функций мультипликативна.
Задача 3. Производящий ряд Дирихле функции $f(n)$ — это формальное выражение вида

$$\mathcal{D}_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

где $n^{-s} \cdot m^{-s} = (nm)^{-s}$. Докажите, что $\mathcal{D}_{f*g}(s) = D_f(s) \cdot D_g(s)$ и алгебра всех арифметических функций, в которой умножение — свёртка, изоморфна $\mathbb{C}[[x_1, x_2, x_3, \ldots]]$.
Задача 4. Пусть K — числовое поле. Зададим дзета-функцию Дедекинда $\zeta_K(s)$ формулой

$$\zeta_K(s) = \sum_{I \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{(NI)^s} \qquad \text{(сумма берется по идеалам } \mathcal{O}_K\text{)}$$

Докажите, что

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} \qquad \text{(произведение берется по простым идеалам)}$$

Задача 5. Пусть $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ и $L(s, \chi_4) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(n)}{n^s}$, где $\chi_4(n) = (-1)^{(n-1)/2}$ для нечётных n и 0 для четных.

- а) Найдите формулу для $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)$ в терминах $\zeta(s)$ и $L(s, \chi_4)$.
- б) Найдите формулу в тех же терминах для $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{r_2(n^2)}{n^s}$.

6. Пусть α — алгебраическое число с минимальным многочленом $f(x)$ и $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Докажите, что для всех простых p, кроме конечного числа, в кольце $\mathcal{O}_K$ существует идеал с нормой p тогда и только тогда, когда у $f(x)$ есть корень в $\mathbb{F}_p$.