НМУ, Аналитические аспекты алгебраической теории чисел
Листок 4. 26.03.2024

Задача 1.
Пусть χ — характер Дирихле $\mod q$ и $q \mid q_1$. Будем говорить, что характер Дирихле χ_1 индуцирован характером χ, если

$$\chi_1(n) = \begin{cases} \chi(n) \text{ если } (n, q_1) = 1 \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Характер χ примитивен, если он не индуцирован характерами по меньшему модулю. Пусть $f(q)$ — количество примитивных характеров $\mod q$. Докажите, что функция f мультипликативна и найдите $f(p^k)$ для простого p и $k \geq 1$.

Задача 2.
Пусть $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$, где p_i — простые числа и $\varepsilon = \pm 1$. Для целого $a \neq 0$ определим символ Кронекера формулой

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{u}\right) \prod_i \left(\frac{a}{p_i}\right)^{\alpha_i},$$

где $\left(\frac{a}{1}\right) = 1$, $\left(\frac{a}{-1}\right) = \operatorname{sgn} a$, $\left(\frac{a}{p}\right)$ — символ Лежандра для $p > 2$ и

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } a \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 \text{ при } a \equiv \pm 3 \pmod 8 \\ 0 \text{ для четных } a. \end{cases}$$

Докажите, что

а) $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$ и $\left(\frac{a}{mn}\right) = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right)$.

б) Если n' — нечетная часть числа n, то есть $n = 2^e n'$, где n' нечетно, то

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n'-1)/2} \text{ и } \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \varepsilon(n,m)(-1)^{(n'-1)(m'-1)/4},$$

где $\varepsilon(n,m) = 0$ при $(m,n) \neq 1$, $\varepsilon(n,m) = -1$, если n и m отрицательны, и $\varepsilon(n,m) = 1$ иначе. Также $\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)$.

в) Если D — дискриминант квадратичного поля, то $\chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ — примитивный характер по модулю $|D|$.

Задача 3.
Пусть K — квадратичное поле дискриминанта D. Докажите, что

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi_D).$$

Задача 4.

а) Пусть χ_1 — характер Дирихле $\mod q_1$, индуцированный характером $\chi \mod q$. Докажите, что

$$L(s,\chi_1) = L(s,\chi) \prod_{p|q_1, p\nmid q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

б) Докажите, что для любого примитивного квадратичного характера χ существует дискриминант D квадратичного поля такой, что $\chi = \chi_D$. Заключите, что $L(1,\chi) \neq 0$ для любого характера Дирихле χ.

Задача 5.
Докажите, что для любого натурального n число $\pi^{1-2n} L(2n-1, \chi_{-4})$ рационально.

Задача 6.
Пусть K — квадратичное поле и $c \in \mathrm{Cl}^+(K)$, причем $c^2 = 1$.

а) Докажите, что для любого $I \in c$ существует $\beta \in \mathcal{O}_K/\{0\}$ такое, что $(\overline{\beta})I = (\beta)\overline{I}$.

б) Пусть I — целый идеал минимальной нормы в c, а β — элемент минимальной нормы, удовлетворяющий условию из пункта а). Предположим, что идеал (β) раскладывается на простые так:

$$(\beta) = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \dots \mathfrak{p}_m^{\alpha_m}, \alpha_i > 0$$

Докажите, что $\overline{\mathfrak{p}_i} \neq \mathfrak{p}_j$ при $i \neq j$ и если $\overline{\mathfrak{p}_i} \neq \mathfrak{p}_i$, то $\mathfrak{p}_i$ входит в разложение I в степени α_i.

в) Докажите, что 2-кручение в группе $\mathrm{Cl}^+(K)$ порождено идеалами, делящими дискриминант.