

Функции многих переменных. Функции, заданные неявно.

1. Пусть $F(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Напишите уравнение касательной плоскости к линии уровня функции $F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$ в точке (x_0, y_0, z_0) и покажите, что градиент функции F ортогонален касательной плоскости.

2. Рассмотрим линейное уравнение с частными производными первого порядка

$$f_1(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + f_3(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Докажите, что первые интегралы системы

$$\frac{\dot{x}(t)}{f_1} = \frac{\dot{y}(t)}{f_2} = \frac{\dot{z}(t)}{f_3}, \quad (2)$$

то есть такие функции $F(x(t), y(t), z(t)) = \text{const}$, которые постоянны на решениях уравнения (2), являются решениями уравнения (1).

3. Найдите решения $u(x, y)$ уравнений:

(а) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

(б) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

4. Опишите все функции $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие уравнению $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv 0$.

5. Уравнением колебаний струны называется следующее уравнение относительно неизвестной функции $u \in C^2(\mathbb{R})$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

График функции $y(x) = u(x, t)$ при фиксированном t представляет собой профиль струны в момент времени t .

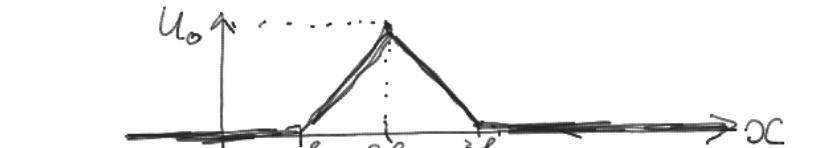
(а) Найдите общее решение этого уравнения. (Указание: рассмотрите новые координаты $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.)

(б) Пусть заданы начальные условия

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ u'_t(x, 0) = v_0(x) \end{cases}$$

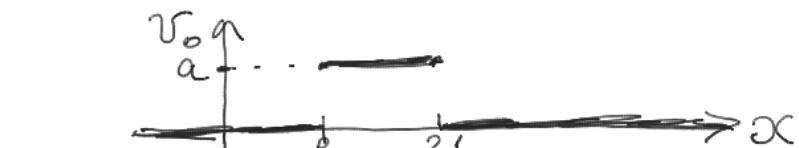
Напишите формулу для решения, заданного этими условиями.

(в) (Струна гитары.) Пусть $v_0 = 0$, а u_0 – функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в момент времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, \dots, 5$.

(г) (Струна рояля.) Пусть $u_0 = 0$, а v_0 – функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в момент времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, \dots, 5$.

6. Докажите, что корни уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

гладко зависят от коэффициентов, по крайней мере, пока они различны.