

Критические значения. Теорема Сарда.

Точка x называется *критической точкой* отображения $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, если ранг матрицы Якоби отображения f в точке x ниже максимально возможного, т.е. $\min(m, n)$. Значение отображения f в критической точке x называется *критическим значением* отображения f . Речь в листке идёт о множестве $\Sigma^1(f)$ критических значений отображения f .

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством меры ноль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся счётное объединение параллелепипедов $\Pi_l = [a_1^l, b_1^l] \times \dots \times [a_n^l, b_n^l]$, $l \in \mathbb{N}$ суммарным объёмом, не превосходящим ε , содержащее множество $X \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \Pi_l$.

1. Пусть $y = f(x)$ — гладкая функция на $[0, 1]$. Докажите, что мера множества особых значений отображения f равна нулю. Верно ли аналогичное утверждение про критические точки?

2. Пусть f — гладкое отображение m -мерного куба $[0, 1]^m$ в m -мерное евклидово пространство. Докажите, что мера множества особых значений отображения f равна нулю.

3. Пусть f — гладкое отображение куба $[0, 1]^m$ в n -мерное евклидово пространство. Докажите, что при достаточно большом k мера образа множества точек, где обращаются в ноль все производные функции f порядков $1, \dots, k$, равна нулю (достаточно выполнения условия $(k + 1)n > m$).

4. Пусть f — гладкая функция двух переменных. Докажите, что мера множества особых значений отображения f равна нулю.

5. Пусть f — гладкая функция m переменных. Докажите, что мера множества особых значений равна нулю.

6. Пусть отображение f задано n функциями f_i от m переменных x_j , и пусть в некоторой точке $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$. Тогда в окрестности этой точки можно выбрать координаты ξ так, что отображение запишется в виде однопараметрического семейства g_{ξ_1} отображений $(m - 1)$ -мерного пространства в $(n - 1)$ -мерное:

$$y_1 = \xi_1, \quad y' = g_{\xi_1}(\xi') \quad (\xi' = \xi_2, \dots, \xi_m, \quad y' = y_2, \dots, y_m).$$

7. (Теорема Сарда) Докажите, что мера множества особых значений достаточно гладкого отображения равна нулю. Какой степени гладкости будет достаточно?