Алгебры множеств. Мера Лебега.

Кольцом подмножеств множества X называется непустая система подмножеств X, замкнутая относительно операций объединения, пересечения и разности. Алгеброй назвыается кольцо, содержащее в качестве элемента все множество X, σ- алгеброй называется алгебра, замкнутая относительно операции счетного объединения.

1. Докажите, что операция симметрической разности удовлетворяет следующему условию:

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

(аналог неравенства треугольника для расстояния $\rho(A, B) = A \triangle B$, принимающего значения на множествах).

2. Докажите, что (а) система множеств, замкнутая относительно операций объединения и разности, является кольцом, (б) система множеств, замкнутая относительно операций объединения и пересечения, вообще говоря, не является кольцом.

3. Докажите, что алгебра, замкнутая относительно счетных объединений, замкнута относительно счетных пересечений и наоборот (σ-алгебра является δ-алгеброй и наоборот).

4. Докажите, что система подмножеств является кольцом тогда и только тогда, когда их характеристические функции образуют кольцо относительно операций сложения и умножения по модулю два.

5. Пусть A – множество, S – система всех таких множеств $B \subseteq A$, что либо B, либо $A \setminus B$ не более чем счетно. Докажите, что S является σ-алгеброй.

6. Доказать, что (а) пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, кольцом $\{\emptyset\}$), (б) пересечение произвольной системы алгебр (σ-алгебр) с одной и той же единицей является алгеброй (σ-алгеброй). (в) Приведите пример двух σ-алгебр, пересечение которых не является алгеброй.

7. Пусть S – система множеств. Докажите, что существует такое кольцо $R(S)$, что $S \subset R(S)$ и для любого кольца $R_1 \supseteq S$ выполнено $R(S) \subset R$. Это кольцо называется минимальным кольцом, содержащим систему S. Докажите, что если система S содержит единицу E, то $R(X)$ является алгеброй.

Канторовым множеством называется множество, которое строится следующим образом: из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим среднюю треть, т.е. интервал $(1/3, 2/3)$ и получим множество $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, а затем будем повторять процедуру на каждом шаге удаляя средние трети всех отрезков, составляющих множество C_n, построив таким образом C_{n+1}. Канторово множество C получим как пересечение множеств C_n, $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

8. Докажите следующие свойства канторова множества C

а) *Подмножество топологического пространства называется совершенным, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек.* Докажите, что C – совершенное подмножество $\mathbb{R}$.

б) Докажите, что C нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

в) Докажите, что C имеет мощность континуума.

г) Представим каждое число на $[0; 1]$ в виде бесконечной троичной дроби. Какие троичные дроби соответствуют точкам из C?

д) Докажите, что множество C имеет меру ноль.

е) Опишите множества $C + C$ и $C - C$ ($C \pm C = \{x \pm y,\ x, y \in C\}$).

ж) Найдите такие множества $A, B \subset \mathbb{R}$ меры ноль, что $A + B = \mathbb{R}$.

9. Докажите, что мощность множества измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$ больше континуума.

Несколько задач про меру Лебега

10. а) (регулярность меры Лебега). Докажите, что для любого измеримого множества $A \subseteq R$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ открыто}\} = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ компактно}\}.$$

б) Докажите, что всякое измеримое по Лебегу множество $A \subseteq R$ представимо в виде $A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) \cup N$, где K_n – компакты и N –множество меры 0. Как следствие, всякое измеримое по Лебегу множество отличается от некоторого борелевского на множество меры 0.

Внутренней мерой множества $A \subseteq [0,1]$ *называется число* $\mu_*(A) = 1 - \mu^*([0,1] \setminus A)$, *где* μ^* *– внешняя мера.*

11. Докажите, что $\mu^*(A) \geqslant \mu_*(A)$.

12. Докажите, что множество $A \subseteq [0,1]$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

13. Существует ли измеримое по Лебегу множество A, такое, что для любого отрезка $[a,b]$ выполнено $\mu(A \cap [a,b]) = \frac{b-a}{2}$?

14. Пусть A – измеримое по Лебегу множество ненулевой меры. Докажите, что множество $A - A$ содержит некоторую окрестность нуля.