

## Интеграл Лебега-2

1. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  – измеримые подмножества отрезка  $[0, 1]$  и  $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) > n - 1$ . Докажите, что есть точка  $a \in [0, 1]$ , принадлежащая сразу всем  $A_i$ .
2. (а) Пусть  $f \in L(A)$  и для любого измеримого множества  $B \subset A$ , выполнено равенство

$$\int_B f d\mu = 0.$$

Докажите, что  $f(x) = 0$  почти всюду на  $A$ .

(б) Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – интегрируемая по Лебегу функция, причем  $\int_{[a,x]} f d\mu = 0$  для любого  $x \in [a, b]$ . Докажите, что  $f = 0$  почти всюду.

3. (Неравенство Чебышева.) Пусть функция  $f \in L(A)$ , неотрицательна на  $A$  и  $A_\varepsilon = \{x | x \in A, f(x) \geq \varepsilon\}$ , при  $\varepsilon > 0$ . Доказать, что

$$\mu(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_A f d\mu.$$

4. Пусть  $(X, \mu)$  – пространство с мерой. Говорят, что последовательность  $\{f_n\}$  интегрируемых функций на  $X$  сходится к интегрируемой функции  $f$  в среднем, если  $\int_X |f - f_n| d\mu \rightarrow 0$ , ( $n \rightarrow \infty$ ).

- (а) Докажите, что если  $\mu(X) < \infty$ , то равномерная сходимость влечет сходимость в среднем.
- (б) Верно ли предыдущее утверждение, если  $\mu(X) = \infty$ ?
- (в) Докажите, что сходимость в среднем влечет сходимость по мере.
- (г) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.
- (д) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в каждой точке, но не сходящейся в среднем.

5. (Меры Стильеса). Пусть  $\mathcal{A}$  – алгебра (не  $\sigma$ -алгебра!) подмножеств полуинтервала  $(0, 1]$ , порожденная всеми полуинтервалами вида  $(a, b]$  ( $a, b \in (0; 1], a < b$ ). Пусть  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  – неубывающая функция.

- (а) Докажите, что на  $\mathcal{A}$  существует единственная мера  $\mathcal{F}$ , такая, что  $\mu_{\mathcal{F}}((a, b]) = F(b) - F(a)$  для любого полуинтервала  $(a, b] \subset (0, 1]$ .
- (б) Докажите, что любая конечная мера на  $\mathcal{A}$  имеет указанный вид.
- (в) Придумайте условие на функцию  $F$ , необходимое и достаточное для того, чтобы  $\mu_{\mathcal{F}}$  была  $\sigma$ -аддитивна.

(г) Предположим, что  $\mu_{\mathcal{F}}$   $\sigma$ -аддитивна. Продолжим ее на  $\sigma$ -алгебру, содержащую все борелевские подмножества  $(0, 1]$ , тем же способом, что и меру Лебега. Вычислите значения  $\mu_{\mathcal{F}}$  на всевозможных отрезках, интервалах и полуинтервалах.

6. Пусть  $T$  – произвольное выпуклое компактное тело в  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что если  $(n-1)$ -мерный объем проекции  $T$  на любую гиперплоскость не меньше  $S$ , то  $\text{diam} T \leq n \frac{V}{S}$ , где  $V = \mu(T)$ .

7\*. Пусть  $T \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклое компактное центрально симметричное относительно нуля тело,  $\mathcal{E}$  – эллипсоид максимального объема, содержащийся в  $T$ :

$$\mathcal{E} \subset T, \quad \mu(\mathcal{E}) = \sup\{\mu(\mathcal{E}) \mid \mathcal{E} \subset T, \mathcal{E} \text{ – эллипсоид}\}.$$

Докажите, что  $T \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$ .

8\*. Дана последовательность шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а сумма объемов бесконечна. Докажите, что в куб можно положить конечное число шаров из этой последовательности таким образом, что они заполнят 0,99 его объема.