# Листок 1

1. Записать оператор Лапласа $\Delta$ в сферических и гиперболических координатах.

2. Доказать, что следующие объекты являются гладкими аналитическими многообразиями:
   (a) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
   (b) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$
   (c) $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$
   (d) $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$
   (e) $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$
   (f) $\mathrm{Gr}_{m,n}(\mathbb{C})$ на примере $\mathrm{Gr}_{2,4}(\mathbb{C})$

3. Пусть $A, B$ — линейные операторы в $\mathbb{R}^n$. Зададим векторные поля $X, Y$ как $X(v) = Av,\ Y(v) = Bv \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$. Найти $[X, Y]$ в терминах $A$ и $B$.

4. Пусть $N$ — гладкое многообразие размерности $n$. Доказать, что для любого гладкого $k$-мерного подмногообразия $M \subseteq N$ и любой точки $x \in M$, существуют координаты в окрестности $U \subset N$ точки $x$, такие что $M \cap U$ задаётся там уравнениями $x^{k+1} = x^{k+2} = ... = x^n$.

5. Доказать, что коммутатор векторных полей, касательных к подмногообразию, будет полем, касательным к этому подмногообразию (он равен коммутатору ограничений векторных полей на это подмногообразие).

6. Пусть $\xi$ — векторное поле, $L_\xi$ - производная Ли вдоль $\xi$.
   (a) Пусть $Y$ — векторное поле. Доказать, что $L_\xi Y = [\xi, Y]$.
   (b) Пусть $\omega$ — дифференциальная форма. Доказать, что $(L_\xi \omega)_{(Y)} = \xi\omega(Y) - \omega([\xi, Y])$.
   (c) Пусть $T \in T^{1,q}M$ — тензорное поле, задаваемое $f$-(поли)линейным отображением из $q$ векторных полей в векторное поле. Доказать, что
   $$L_\xi T(Y_1, ..., Y_q) = [\xi, T(Y_1, ..., Y_q)] - T([\xi, Y_1], Y_2, ..., Y_q) - ... - T(Y_1, ..., Y_{q-1}, [\xi, Y_q]).$$

7. Пусть $A$ — операторное поле на многообразии. Положим
   $$N_A(X, Y) = A^2([X, Y]) - A([AX, Y] - [X, AY]) + [AX, AY].$$
   Доказать, что $N_A$ — тензорное поле типа $(2, 1)$.

8. Напомним, что *поливекторными полями* степени $p$ на многообразии называют кососимметрические тензорные поля типа $(p, 0)$. *Скобкой Схоутена* $p$-векторного поля $A$ и $q$-векторного поля $B$ называют следующее выражение
   $$[A, B]^{i_1 \dots i_{p-1} j k_1 \dots k_{q-1}} = pA^{l(i_1 \dots i_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x^l} B^{j k_1 \dots k_{q-1})} - qB^{l(k_1 \dots k_{q-1}} \frac{\partial}{\partial x^l} A^{j i_1 \dots i_{p-1})}.$$
   Здесь $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты, а скобки $A^{a(b}B^{c)d}$ обозначают антисимметризацию по индексам, стоящим внутри скобок.
   (a) Докажите, что скобка Схоутена — $p + q - 1$-векторное поле;

(b) Докажите, что скобка Схоутена удовлетворяет градуированному тождеству Лейбница по отношению к внешнему произведению поливекторных полей:

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{q(p-1)} B \wedge [A, C]$$

для любых $p$-векторного поля $A$ и $q$-векторного поля $B$.

9. Напомним, что *симплектической формой* $\omega$ на многообразии называют замкнутую невырожденную 2-форму $\omega$. Если $\omega_{ij}$ — компоненты формы $\omega$, то символом $\omega^{ij}$ мы будем обозначать компоненты обратного к $\omega$ бивекторного поля. Для любой гладкой функции $f$ на многообразии *гамильтоновым полем* $f$ называют поле с компонентами $X^i = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

   Пусть $X, Y$ — гамильтоновы векторные поля некторых функций.

   (a) Доказать, что $L_X \omega = 0$.

   (b) Доказать, что $[X, Y]$ — гамильтоново векторное поле.

10. Доказать, что у компактного симплектического многообразия все чётномерные когомологии де Рама нетривиальны.

11. Вычислить когомологии де Рама и указать дифференциальные формы, их порождающие для многообразий $\mathrm{S}^2$, $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

12. Найти:

   (a) $\int_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}\left(g^{-1} dg\right)$

   (b) $\int_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})} \mathrm{Tr}\left((g^{-1} dg)^3\right)$

   (c) $\int_{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}\left((g^{-1} dg)^3\right)$