# Листок 2

Напомним, что интегральным подмногообразием интегрируемого распределения $T^c \subset TM^d$ называется многообразие $N^c$ и гладкое погружение $f : N \to M$ такое, что $df(T_pN) = T(f(p))$ для любого $p \in N$; при этом $f$ может не быть гомеоморфизмом.

1. Докажите, что теорема Фробениуса эквивалентна следующему утверждению:
   *Пусть $U \times V \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$, и пусть дано гладкое отображение*
   $$b : U \times V \to Mat_{n\times m}(\mathbb{R}),\ b(x,y) = (b_{i\alpha}(x,y)),\ i = 1, \dots, n,\ \alpha = 1, \dots, m.$$
   *Предположим, что в $U \times V$ для всех $i = 1, \dots, n,\ \alpha, \beta = 1, \dots, m$ выполнены равенства*
   $$\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial b_{i\beta}}{\partial x^\alpha} + \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial y^j} b_{j\beta} - \frac{\partial b_{i\beta}}{\partial y^j} b_{j\alpha} \right) = 0.$$
   *Тогда в некоторой окрестности $U_0 \times V_0$ любой точки $(x_0, y_0) \in U \times V$ существует единственное гладкое отображение $a : U_0 \times V_0 \to V$ такое, что*
   $$a(x_0, y) = y,\ J_y(a(x,y)) = b(x, \alpha(x,y)),$$
   *где $J_y$ — матрица частных производных по координатам $y$ («матрица Якоби в направлении $y$»).*

2. Максимальным интегральным многообразием распределения $T$ называется такое связное интегральное подмногообразие $N$ распределения $T$, образ которого $f(N)$ не лежит в качестве собственного подмножества ни в одном образе связного интегральном подмногообразии. Докажите, что через каждую точку $m \in M$ проходит единственное максимальное интегральное подмногообразие.

3. Пусть $\mathscr{F}_T \subset \Omega^*(M)$ — идеал в алгебре дифференциальных форм на $M$, состоящий из форм, зануляющихся на векторах из $T$. Докажите, что распределение $T$ интегрируемо, если и только если $d\mathscr{F}_T \subseteq \mathscr{F}_T$.

4. Пусть $\mathbb{R}^1$ — вещественная прямая с обычной гладкой структурой, а $\hat{\mathbb{R}}^1$ — вещественная прямая с гладкой структурой, заданной картой $x \mapsto x^3$. Докажите, что, хотя эти гладкие структуры разные, тем не менее $\mathbb{R}^1$ и $\hat{\mathbb{R}}^1$ — диффеоморфны.

5. Каждое ли векторное поле на вещественной прямой — полное?

6. Докажите, что
   (a) Вектора $v_1, \dots, v_l \in V^d$ линейно-независимы, если и только если $0 \neq v_1 \wedge \dots \wedge v_l \in \Lambda^l V$;
   (b) Докажите, что линейно-независимые наборы векторов $v_1, \dots, v_l$ и $w_1, \dots, w_l$ в $V^d$ задают одно и то же подпространство, если и только если $v_1 \wedge \dots \wedge v_l = cw_1 \wedge \dots \wedge w_l$ для некоторого $c \neq 0$.

7. Пусть $\omega_1 \dots, \omega_k$ — линейно-независимые дифференциальные 1-формы на $M^d$, $d > k$. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_k$ — такие 1-формы на $M$, что
$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$
Докажите, что существуют гладкие функции $A_{ij} = -A_{ji}$, $i, j = 1, \dots, k$ на $M$ такие, что
$$\theta_i = \sum |_{j=1}^{k} A_{ij} \omega_j, \ i = 1, \dots, k.$$

8. Напомним, что *функцией Морса* называется такая гладкая функция $f$ на многообразии $M$, у которой все критические точки неособые (то есть такие, что матрицы частных производных $f$ в этих точках невырождены) и все критические значения — различны. Докажите, что на любом многообразии $M$ существуют функции Морса. Более того, *для любой функции $g : M \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция Морса $f : M \to \mathbb{R}$ такая, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in M$.*

9. Найдите степень отображения $f$ из сферы Римана в себя, если

   (a) $f$ задано многочленом $n$-й степени;

   (b) $f$ задано рациональной функцией $f = \dfrac{P}{Q}$, где $P$, $Q$ — многочлены степеней $p$ и $q$ соответственно.

10. Существует ли отображение степени 1

   (a) $f : \mathbb{T}^2 \to S^2$?

   (b) $f : S^2 \mapsto \mathbb{T}^2$?

11. Пусть $M$, $N$ и $W$ — замкнутые ориентируемые $n$-мерные многообразия; пусть $N$, $W$ — связные, а $f : M \to N$, $g : N \to W$ — гладкие отображения. Покажите, что $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$.

12. Пусть $M$, $N$ — гладкие, замкнутые ориентированные многообразия размерности $n$, причем $M = \partial W^{n+1}$. Предположим, что отображение $f : M \to N$ продолжается до гладкого отображения $F : W \to N$. Докажите, что тогда $\deg(f) = 0$.

13. Пусть $S^{n-1}$ — стандартная единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, и $p : S^{n-1} \to S^{n-1}$ — центральная симметрия. Покажите, что $\deg(p) = (-1)^n$.

14. Пусть $\omega$ - дифференциальная $n$-форма с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, интеграл которой по $\mathbb{R}^n$ равен 0. Доказать (не используя знания о когомологиях де Рама), что эта форма точная, более того она равна дифференциалу формы с компактным носителем.