Листок 3

1. Пусть $\Sigma^{2n} \looparrowright \mathbb{R}^{2n+1}$ — погруженная четномерная ориентированная замкнутая гиперповерхность в евклидовом пространстве; $\gamma : \Sigma \to S^{2n}$ — *гауссово нормальное отображение* (сопоставляющее точке на поверхности нормальный вектор в этой точке). Докажите, что справедлива формула:

$$\gamma^*(d\mathrm{vol}_{S^{2n}}) = K d\mathrm{vol}_{\Sigma^{2n}},$$

где K — кривизна Гаусса этой гиперповерхности (отношение детерминантов второй и первой квадратичных форм), а $d\mathrm{vol}_\Sigma$ — форма объёма поверхности Σ (индуцированная из $\mathbb{R}^{2n+1}$).

2. Докажите *теорему Пуанкаре-Хопфа для многообразия с краем*: если гладкое поле v на компактном многообразии M с краем ∂M имеет изолированные особенности внутри M и направлено вовне на краю, то сумма индексов v на M равна эйлеровой характеристике M.

3. Используя теорему Пуанкаре-Хопфа, докажите, что

   (a) эйлерова характеристика многообразия не зависит от выбора триангуляции;

   (b) эйлерова характеристика замкнутого ориентируемого нечетномерного многообразия равна нулю;

   (c) эйлерова характеристика ориентируемого нечетномерного многообразия с краем равна половине эйлеровой характеристики края.

4. Докажите следующий вариант теоремы Пуанкаре-Хопфа для многообразий с краем (принадлежащий Марстену Морсу): пусть M — компактное многообразие с краем, v — векторное поле на M, имеющее изолированные особенности внутри M и такое, что $v \neq 0$ на границе ∂M и имеется только конечное число точек, в которых $v \perp \partial M$. Пусть $\partial_- v$ — векторное поле на границе M, полученное ортогональным проектированием v и рассматриваемое только в тех точках границы, где v направлено внутрь M (мы обозначаем эту часть границы символом $\partial_- M$). Тогда

$$\mathrm{Ind}_M v + \mathrm{Ind}_{\partial_- M} \partial_- v = \chi(M).$$

5. Используйте вышеприведённые результаты и следующее топологическое утверждение :

   для любой ориентированной замкнутой четномерной поверхности Σ^{2n}, погруженной в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$, существует ориентированное многообразие W^{2n+1} с краем $\partial W = M$ (так, что индуцированная ориентация на M совпадает с заданной) и гладкое отображение $f : W \to \mathbb{R}^{2n+1}$, совпадающее на границе W с заданным погружением M,

   чтобы доказать *формулу Гаусса-Бонне*: при вышеуказанных условиях

$$\int_{\Sigma^{2n}} K d\mathrm{vol}_{\Sigma^{2n}} = \frac{1}{2}\mathrm{vol}(S^{2n})\chi(\Sigma^{2n})$$

6. Рассмотрим на сфере S^n связность, индуцированную при помощи канонического вложения сферы в евклидово пространство. Опишите геодезические этой связности.

7. Докажите, что при параллельном переносе вектора по сфере S^2 вдоль замкнутой кривой (относительно связности, индуцированной при помощи вложения $S^2 \subset \mathbb{R}^3$), образ вектора будет повернут относительно его исходного положения на угол, численно равный площади фигуры, ограниченной этой кривой.

8. Напомним, что симплектической формой ω на X называется невырожденная замкнутая 2-форма; многообразие, на котором выбрана симплектическая форма, называется *симплектическим многообразием.* Докажите, что на любом симплектическом многообразии существует *симплектическая связность*, то есть такая симметрическая (то есть $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$) аффинная связность ∇, для которой $\nabla(\omega) = 0$. Единственная ли такая связность?

9. Рассмотрим для произвольной аффинной связности ∇ и произвольного векторного поля v на многообразии *производную Ли* ∇ вдоль v, то есть операцию $\mathcal{L}_v\nabla$, которая паре векторных полей X, Y сопоставляет векторное поле
$$\mathcal{L}_v\nabla(X,Y) = [v, \nabla_X Y] - \nabla_{[v,X]}Y - \nabla_X[v,Y].$$
Докажите, что
   (a) операция $\mathcal{L}_v\nabla$ является тензорным полем;
   (b) если ∇ — симметричная связность, то $\mathcal{L}_v\nabla(X,Y) = \mathcal{L}_v\nabla(Y,X)$.