Листок 4

1. Пусть ∇ — аффинная связность на гладком многообразии M, X — векторное поле, а T — тензорное поле на M. Пусть $\gamma_p^X(s)$ — интегральная кривая поля X, проходящая через точку $p \in M$ при $s = 0$. Напомним, что параллельный перенос векторов вдоль путей на M может быть продлён на тензорные поля (так как каждое тензорное поле может быть рассмотрено, как полилинейное $\mathfrak{F}$-линейное отображение на векторных и ковекторных полях). Пусть $\tau(s)$ — параллельный перенос вдоль интегральных кривых поля X из точки p в точку $\gamma_p^X(s)$.

   Докажите, что формула
   $$\nabla_X T_p = \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s}(\tau(-s)T_{\gamma_p^X(s)} - T_p)$$
   задаёт на тензорных полях операцию «коваринтного дифференцирования вдоль X», удовлетворяющую следующим условиям:

   (a) $\nabla_X T$ — тензорное поле того же типа, что и T;

   (b) $\nabla_{fX+gY} T = f\nabla_X T + g\nabla_Y T$ для любых векторных полей X, Y и любых гладких функций f, g;

   (c) операция ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница по отношению к операции тензорного произведения;

   (d) операция ∇_X перестановочна с операцией свёртки.

2. Докажите, что операция ∇_X из предыдущей задачи — единственная операция на тензорных полях, удовлетворяющая условиям, перечисленным в предыдущем упражнении и совпадающая с отображением, заданным связностью ∇ на векторных полях. Найдите формулу для $\nabla_X T$ в координатах в терминах символов Кристофеля Γ_{ij}^k.

3. Докажите, что символы Кристофеля связности ∇ обращаются в 0 в точке $p \in M$ в нормальных координатах с центром в p.

4. Докажите формулу
   $$\Gamma_{ij}^i = -\frac{1}{2g}\frac{\partial}{\partial x^j}(\ln(g)),$$
   где Γ_{ij}^k — символы Кристофеля связности Леви-Чивита для (псевдо) римановой метрики (g_{ij}) и g — детерминант этой метрики.

5. Проверьте, что связность, индуцированная на многообразии при помощи вложения в некоторое евклидово пространства, совпадает со связностью Леви-Чивита относительно римановой структуры, индуцированной при помощи того же вложения.

6. Проверьте, что кривизна аффинной связности, то есть операция
   $$R(X, Y; Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$
   определяет тензорное поле типа $(1, 3)$ на многообразии.

Напомним, что на любом связном римановом многообразии можно ввести метрику
$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(0) = p,\, \gamma(1) = q\}.$$

7. Изометрией риманова многообразия M на риманово многообразие N называется диффеоморфизм, сохраняющий все расстояния (в смысле введённой метрики) между точками. Докажите, что

   (a) диффеоморфизм $f : M \to N$ является изометрией, если и только если он сохраняет длины всех кривых;

   (b) диффеоморфизм $f : M \to N$ является изометрией, если и только если выполняется равенство

   $$g_{ij}^M(x) = g_{ij}^N(f(x))\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^i}\frac{\partial y^j(x)}{\partial x^j}$$

   для любых локальных координат $(x^1, \dots, x^n)$ и $(y^1, \dots, y^n)$ на M и N (так что отображение f задается как $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$);

   (c) докажите, что если многообразия M, N — связные, $f, g : M \to N$ — две изометрии и существует точка $p \in M$ для которой $f(p) = g(p)$, $d_p f = d_p g$, то $f(q) = g(q)$ для любой точки $q \in M$.

8. Докажите, что

   (a) все изометрии евклидовых пространств имеют вид $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b}$, где матрица A — ортогональная;

   (b) любая изометрия сферы S^n является ограничением на сферу некоторой изометрии пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющей начало координат.

9. Опишите группу изометрий *плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре*, то есть верхней полуплоскости

   $$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

   с метрикой

   $$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y}.$$