

Листок 5

1. Докажите, что на компактных ориентируемых двумерных поверхностях существует метрика неположительной гауссовой кривизны, и следовательно они накрываются двумерной плоскостью. **Указание:** постройте плоскую метрику на торе и покажите, как надо склеивать торы, чтобы кривизна оставалась неположительной.
2. Опишите, как тензор кривизны Римана связан с формой кривизны связности на касательном расслоении. Выведете тождество Бьянки для тензора Римана из свойств форм кривизны на векторных расслоениях.
3. Докажите, что главные расслоения тривиальные если и только если в них имеется глобальное сечение. Докажите, что векторные расслоения тривиальные, если в них имеется глобальные линейно независимые сечения в количестве, равном рангу расслоения.
4. Докажите, что все главные расслоения над окружностью со связной структурной группой — тривиальные.
5. Докажите, что связности на главном расслоении индуцируют связности на ассоциированных векторных расслоениях.
6. * Докажите, что первый класс Чженя, получающийся из точной последовательности когомологий пучков (см. лекции), совпадает (с точностью до множителя) с классом Чженя, построенным по связности на линейном расслоении.
7. Покажите, что класс чеховского коцикла $\{\text{Tr}(d \log(g_{\alpha\beta}))\}$, где $g_{\alpha\beta}$ — коцикл, задающий комплексное расслоение E , — совпадает с первым классом Чженя этого расслоения.
8. Докажите, что нечетные классы Чженя комплексификации вещественного ориентируемого расслоения — тривиальны (используя дифференциально-геометрическое определение).