Листок 1, 12 февраля 2024 г.

Задача 1. Отображение, при котором множество X переходит в одну точку, называется *постоянным.* Докажите, что постоянное отображение непрерывно.

Задача 2. Опишите все топологии на множествах, состоящим из не более чем трех элементов.

Задача 3. Докажите, что вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ с естественной топологий обладает счетной базой.

Задача 4. Опишите все базы для топологического пространства X с дискретной топологией. С антидискретной топологией.

Задача 5. Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная прямая с естественной топологий. Пусть X – топологическое пространство с дискретной топологией, X' – топологическое пространство с антидискретной топологией. Опишите множества отображений

- из $\mathbb{R}$ в X;
- из X в $\mathbb{R}$;
- из X' в $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}$ в X'.

Задача 6. Назовем отображение топологических пространств *открытым*, если образ любого открытого множества открыт. Назовем отображение топологических пространств *замкнутым*, если образ любого замкнутого множества замкнут. Приведите примеры непрерывного отображения топологических пространств, не являющегося открытым; замкнутым.

Задача 7. Пусть Y – подмножество топологичесокго пространства X. *Замыканием* $\overline{Y}$ множества Y в X назовем пересечение всех замкнутых множеств, содержащих Y. Докажите, что $\overline{Y}$ замкнуто.

Задача 8. Пусть Y – подмножество топологичесокго пространства X. Будем говорить, что $\overline{Y}$ является *всюду плотным* в X, если пересечение Y с любым открытым подмножеством X непусто. Докажите, что Y всюду плотно в X тогда и только тогда, когда его замыкание совпадает с X.

Задача 9. Опишите все всюду плотные подмножества в пространстве с дискретной топологией; с антидискретной топологией.

Задача 10. Докажите, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.